

İstanbul Üniversitesi

Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi



Programcılar İçin Matematik
DOÇ. DR. BEYAZ BAŞAK ESKİŞEHİRLİ
DOÇ. DR. BEYAZ BAŞAK ESKİŞEHİRLİ

İÇİNDEKİLER

1. ÖNERME VE TEMEL MANTIKSAL İŞLEMLER

2. KÜMELER

3. REEL SAYILAR

4. BAĞINTI

5. FONKSİYONLAR

6. LİMİT

7. TÜREV

8. VEKTÖRLER

9. MATRİSLER

10. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

11. DETERMİNANT

12. OLASILIK

1. ÖNERME VE TEMEL MANTIKSAL İŞLEMLER

1.1. Önermeler ve Birleşik Önermeler

Kesin bir hüküm bildiren, doğru ya da yanlış olan ancak her ikisi birden olmayan bir ifadeye önerme denir.

Önermeler genellikle p, q, r, s, t gibi küçük harflerle gösterilirler.

Örnek:

a) AUZEF, İstanbul Üniversitesi'nin bir fakültesidir.

b) Ankara, İstanbul'un bir ilçesidir.

c) $3 + 3 = 8$

d) $3 + 3 = 6$

e) Nerede yaşıyorsun?

f) En güzel mevsim yazdır.

ifadelerinden e) ve f) önerme değildir. Çünkü, her ikisi de bir hüküm bildirmez. Bununla birlikte, a), b), c) ve d) ifadeleri birer önermedir.

Bir önerme doğru ise doğruluk değeri "1" rakamı ile gösterilir. Bir önerme yanlış ise doğruluk değeri "0" rakamı ile gösterilir.

Örneğin, yukarıdaki a) ve d) önermeleri doğru olduğundan doğruluk değerleri 1 dir. c) ve b) önermeleri yanlış olduğundan doğruluk değerleri 0 dır.

Birden fazla önermenin bağlaçlar ile birleştirilmesiyle oluşan önermelere birleşik önerme denir. Bir önerme kendisinden daha basit alt önermelere ayrılamıyorsa bu önermeye basit yada ilkel önerme denir.

Örneğin yukarıdaki a), b), c), d) önermeleri basit önermelerdir. Bununla birlikte aşağıdaki önermeler birleşik önermelerdir:

a) Bugün 29 Mayıs veya İstanbul'un fethedildiği gündür.

b) 3 asal sayıdır ve çift bir sayıdır.

c) Hava yağmurlu ise güneş yoktur.

Doğruluk değerleri aynı olan önermelere denk önermeler denir. Bir p önermesi bir q önermesine denk ise $p \equiv q$ ile gösterilir, denk değil ise $p \not\equiv q$ ile gösterilir.

Bir p önermesinin doğruluk değerini tam tersiyle değiştirerek önermenin "değilini" yani olumsuzunu elde ederiz ve p önermesinin değili p' ile gösterilir.

Örnek:

$p: 3 < 4$ önermesinin değili $p': 3 \geq 4$ dır. p doğru bir önerme olduğundan doğruluk değeri 1 dir. Bu yüzden p nin değili p' nin doğruluk değeri 0 olacaktır, yani p' yanlış bir önerme olacaktır.

Özellik: p bir önerme olmak üzere,

$$(p')' \equiv p$$

dir, yani bir önermenin değilinin değili kendisine denktir. Doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	p'	$(p')'$
1	0	1
0	1	0

1.2. Temel Mantıksal İşlemler

Bir birleşik önermenin doğruluk değeri, alt önermelerin doğruluk değerleri ve bu önermeleri birleştiren bağlaçların davranışlarıyla ile belirlenir. Bu bölümde “ve”, “veya”, “ise” ve “ancak ve ancak” bağlaçları incelenecektir.

“VE” Bağlacı

Herhangi iki önerme “ve” kelimesi ile birleşerek bir birleşik önerme oluşturur. p ile q iki önerme olmak üzere “ p ve q ” önermesi

$$p \wedge q$$

şeklinde gösterilir.

$p \wedge q$ bir önerme olduğundan bir doğruluk değeri vardır:

p ve q doğru ise $p \wedge q$ doğrudur, diğer tüm durumlarda $p \wedge q$ yanlıştır. Yani, p doğru, q yanlış yada p yanlış, q doğru yada p ve q yanlış olan durumların tümünde $p \wedge q$ yanlıştır.

p ve q önermeleri için 1 ve 0 olmak üzere ikişer doğruluk değerleri olduğundan $p \wedge q$ önermesinin toplam $2 \cdot 2 = 4$ doğruluk durumu vardır. Kolay anlaşılması için $p \wedge q$ önermesinin doğruluk durumlarını bir tablo şeklinde gösterelim:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Bu tablodan da anlaşılacağı gibi, $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ iken, yani p ve q doğru iken $p \wedge q \equiv 1$, yani $p \wedge q$ önermesi de doğrudur. $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ iken, yani p doğru ve q yanlış iken $p \wedge q \equiv 0$, yani $p \wedge q$ önermesi yanlıştır. Benzer şekilde, $p \equiv 0$ ve $q \equiv 1$ iken, yani p yanlış ve q doğru iken $p \wedge q \equiv 0$, yani $p \wedge q$ önermesi yanlıştır. Son olarak, $p \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ iken, yani p ve q yanlış iken $p \wedge q \equiv 0$, yani $p \wedge q$ önermesi de yanlıştır.

Örnek:

p : Bir yıl 300 gündür.

q : Bir yıl 12 aydır.

önergelerini “ve” bağlacıyla birleştirilelim.

$p \wedge q$: Bir yıl 300 gündür ve 12 aydır.

$p \wedge q$ önermesinin doğruluk değerini bulalım:

p önermesi yanlış olduğundan $p \equiv 0$ dir. q önermesi doğru olduğundan $q \equiv 1$ dir. Doğruluk tablosundan $p \equiv 0, q \equiv 1$ olduğu durumda $p \wedge q \equiv 0$, yani $p \wedge q$ yanlış bir önermedir.

Özellikler:

1) p bir önerme olmak üzere,

$$p \wedge p \equiv p$$

dir, yani, p ile $p \wedge p$ denk önermelerdir, başka bir deyişle bir p önermesinin kendisi ile “ve” bağlacı altında oluşturduğu önermenin doğruluk değeri kendisinin doğruluk değeri ile aynıdır.

Bu özelliği doğruluk tablosu yaparak gösterebiliriz:

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

2) p ve q iki önerme olmak üzere,

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

dir, yani “ve” bağlacı altında iki önermenin yerini değiştirmek önermenin doğruluk değerini değiştirmez. “ve” bağlacı, değişme özelliğini korur.

Bu özelliği doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

3) p, q ve r üç önerme olmak üzere,

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

dir. “ve” bağlacı birleşme özelliğini korur.

Bu özelliği doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p , q ve r önermelerinin ikişer tane doğruluk değeri olduğundan $p \wedge q \wedge r$ önermesi için $2.2.2=8$ tane doğruluk durumu söz konusudur.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

“VEYA” Bağlacı

Herhangi iki önerme “veya” kelimesi ile birleşerek bir birleşik önerme oluşturur. p ile q iki önerme olmak üzere “ p veya q ” önermesi

$$p \vee q$$

şeklinde gösterilir.

$p \vee q$ bir önerme olduğundan bir doğruluk değeri vardır:

“ p ve q yanlış ise $p \vee q$ yanlıştır, diğer tüm durumlarda $p \vee q$ doğrudur. Yani, p doğru, q yanlış yada p yanlış, q doğru yada p ve q yanlış olan durumların tümünde $p \vee q$ doğrudur.

p ve q önermeleri için 1 ve 0 olmak üzere ikişer doğruluk değerleri olduğundan

$p \vee q$ önermesinin toplam $2.2=4$ doğruluk durumu vardır.

$p \vee q$ önermesinin doğruluk tablosu şöyledir:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Bu tablodan da anlaşılacağı gibi, $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ iken, yani p ve q doğru iken $p \vee q \equiv 1$, yani $p \vee q$ önermesi de doğrudur. $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ iken, yani p doğru ve q yanlış iken $p \vee q \equiv 1$, yani $p \vee q$ önermesi doğrudur. Benzer şekilde, $p \equiv 0$ ve $q \equiv 1$ iken, yani p yanlış ve q doğru iken $p \vee q \equiv 1$, yani $p \vee q$ önermesi doğrudur. Son olarak, $p \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ iken, yani p ve q yanlış iken $p \vee q \equiv 0$, yani $p \vee q$ önermesi de yanlıştır.

Örnek: “ve” ve “veya” bağlaçları arasındaki farkın anlaşılması açısından yukarıda verdiğimiz örneği tekrar ele alalım:

p : Bir yıl 300 gündür.

q : Bir yıl 12 aydır.

önergelerini “veya” bağlacıyla birleştirelim.

$p \vee q$: Bir yıl 300 gündür veya 12 aydır.

$p \vee q$ önermesinin doğruluk değerini bulalım:

p önermesi yanlış olduğundan $p \equiv 0$ dir. q önermesi doğru olduğundan $q \equiv 1$ dir. Doğruluk tablosundan $p \equiv 0, q \equiv 1$ olduğu durumda $p \vee q \equiv 1$, yani $p \vee q$ doğru bir önermedir.

Özellikler:

1) p bir önerme olmak üzere,

$$p \vee p \equiv p$$

dir, yani, p ile $p \vee p$ denk önermelerdir, başka bir deyişle bir p önermesinin kendisi ile “veya” bağlacı altında oluşturduğu önermenin doğruluk değeri kendisinin doğruluk değeri ile aynıdır.

Bu özelliği doğruluk tablosu yaparak gösterebiliriz:

p	p	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

Tablodan da görüleceği gibi $p \equiv 1$ ise $p \vee p \equiv 1$ dir. $p \equiv 0$ ise $p \vee p \equiv 0$ dir.

2) p ve q iki önerme olmak üzere,

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

dir, yani “veya” bağlacı altında iki önermenin yerini değiştirmek önermenin doğruluk değerini değiştirmez. “veya” bağlacı, değişme özelliğini korur.

Bu özelliği doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

3) p, q ve r üç önerme olmak üzere,

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

dir. “veya” bağlacı birleşme özelliğini korur.

Bu özelliği doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p , q ve r önermelerinin ikişer tane doğruluk değeri olduğundan $p \vee q \vee r$ önermesi için $2.2.2=8$ tane doğruluk durumu söz konusudur.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

4) p , q ve r üç önerme olmak üzere,

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

dir, yani “ve” ve “veya” bağlaçları dağılma özelliğini korur. Bu iki özellik doğruluk tabloları yapılarak Alıştırmalar bölümünde gösterilecektir.

5) (DeMorgan Kuralları) p ve q iki önerme olmak üzere,

$$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$$

$$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$$

Bu iki özellik doğruluk tabloları yapılarak Alıştırmalar bölümünde gösterilecektir.

Doğruluk değeri tüm durumlarda yanlış olan önermeye çelişki, doğruluk durumları tüm durumlarda doğru olan önermeye totoloji denir.

Örnek:

1) p bir önerme olmak üzere $p \vee p'$ önermesi bir totolojidir. Doğruluk tablosundan gösterelim.

p	p'	$p \vee p'$
1	0	1
0	1	1

2) p bir önerme olmak üzere $p \wedge p'$ önermesi bir çelişkidir. Doğruluk tablosundan gösterelim.

p	p'	$p \wedge p'$
1	0	0
0	1	0

“İSE” Bağlacı

Herhangi iki önerme “ise” kelimesi ile birleşerek bir birleşik önerme oluşturur. Bu önermeye önermeye koşullu önerme denir.

p ile q iki önerme olmak üzere “ p ise q ” önermesi, p, q yu gösterir anlamındadır ve

$$p \Rightarrow q$$

şeklinde gösterilir.

$p \Rightarrow q$ bir önerme olduğundan bir doğruluk değeri vardır:

“ p doğru q yanlış iken $p \Rightarrow q$ yanlıştır, diğer tüm durumlarda $p \Rightarrow q$ doğrudur. Yani, p ve q doğru yada p yanlış, q doğru yada p ve q yanlış olan durumların tümünde $p \Rightarrow q$ doğrudur.

p ve q önermeleri için 1 ve 0 olmak üzere ikişer doğruluk değerleri olduğundan $p \Rightarrow q$ önermesinin toplam $2.2=4$ doğruluk durumu vardır.

$p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosu şöyledir:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bu tablodan da anlaşılacağı gibi, $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ iken, yani p ve q doğru iken $p \Rightarrow q \equiv 1$, yani $p \Rightarrow q$ önermesi de doğrudur. $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ iken, yani p doğru ve q yanlış iken $p \Rightarrow q \equiv 0$, yani $p \Rightarrow q$ önermesi yanlıştır. $p \equiv 0$ ve $q \equiv 1$ iken, yani p yanlış ve q doğru iken $p \Rightarrow q \equiv 1$, yani $p \Rightarrow q$ önermesi doğrudur. Son olarak, $p \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ iken, yani p ve q yanlış iken $p \Rightarrow q \equiv 1$, yani $p \Rightarrow q$ önermesi doğrudur.

Özellikler:

I. p ve q iki önerme olmak üzere,

$$(p \Rightarrow q) \equiv (p' \vee q)$$

dur, yani “ p ise q ” önermesi, “ p nin değil veya q ” önermesine denktir. Bu önemli özellik bize “ise” bağlacı yerine “ve” bağlacı ve “değil” işlemini kullanabileceğimizi gösterir.

Bu özelliği doğruluk tablosu yaparak gösterelim:

p	q	p'	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

II. p ve q iki önerme olmak üzere,

$$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$$

dir.

Bu özelliği doğruluk tablosu yaparak gösterelim:

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

“ANCAK VE ANCAK” Bağlacı

p ve q iki önerme olmak üzere, “ p ise q ” ve “ q ise p ” önermelerinin “ve” bağlacıyla birleşmesinden oluşan önermeye denir ve $p \Leftrightarrow q$ ile gösterilir, yani,

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

dir. Bu önermelere iki-koşullu önermeler denir. $p \Leftrightarrow q$ iki-koşullu önermesi “ p ancak ve ancak q yu gösterir” şeklinde söylenir.

$p \Leftrightarrow q$ önermesi, p ve q aynı doğruluk değerine sahip iken doğru, diğer tüm durumlarda yanlıştır.

p ve q önermeleri için 1 ve 0 olmak üzere ikişer doğruluk değerleri olduğundan $p \Leftrightarrow q$ önermesinin toplam $2 \cdot 2 = 4$ doğruluk durumu vardır.

$p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosu şöyledir:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Bu tablodan da anlaşılacağı gibi, $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ iken, yani p ve q doğru iken $p \Leftrightarrow q \equiv 1$, yani $p \Leftrightarrow q$ önermesi de doğrudur. $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ iken, yani p doğru ve q yanlış iken $p \Leftrightarrow q \equiv 0$, yani $p \Leftrightarrow q$ önermesi

yanlıştır. $p \equiv 0$ ve $q \equiv 1$ iken, yani p yanlış ve q doğru iken $p \leftrightarrow q \equiv 0$, yani $p \leftrightarrow q$ önermesi yanlıştır. Son olarak, $p \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ iken, yani p ve q yanlış iken $p \leftrightarrow q \equiv 1$, yani $p \leftrightarrow q$ önermesi doğrudur.

1.3. Çözümlü Sorular

1. p , q ve r üç önerme olmak üzere,

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz.

İlk olarak $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ olduğunu gösterelim:

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Şimdi de $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ olduğunu gösterelim:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

1) (DeMorgan Kuralları) p ve q iki önerme olmak üzere,

$$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$$

$$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$$

olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz.

İlk olarak $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ olduğunu gösterelim.

p	p'	q	q'	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1

Şimdi $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ olduğunu gösterelim.

p	p'	q	q'	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1

2) p : Bugün hava sıcak

q : Bugün hava yağmurlu

önergeleri için p' , $p \wedge q$, $p \vee q$, $q \vee p'$ önergelerini yazınız.

p' : Bugün hava sıcak değil

$p \wedge q$: Bugün hava sıcak ve yağmurlu

$p \vee q$: Bugün hava sıcak veya yağmurlu

$q \vee p'$: Bugün hava yağmurlu veya bugün hava sıcak değil

3) p ve q iki önerme olmak üzere $p \vee (p \wedge q)'$ önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

1.yol:

$$p \vee (p \wedge q)' \equiv p \vee (p' \vee q') \quad (\text{DeMorgan Kuralından})$$

$$\equiv (p \vee p') \vee q' \quad (\text{veya'' işleminin birleşme özelliğinden})$$

$$\equiv 1 \vee q' \quad (p \vee p' \text{ nin doğruluk değeri her zaman 1 olduğundan})$$

$$\equiv 1$$

elde edilir, yani $p \vee (p \wedge q)' \equiv 1$ dir. Bu da $p \vee (p \wedge q)'$ önermesinin bir totoloji olduğunu gösterir.

2.yol: Doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p \vee (p \wedge q)'$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

4) “Hava yağmurlu ise Kerem şemsiyesini yanına alır.” önermesini “ise” bağlacı olmadan yeniden yazınız.

p : Hava yağmurlu

q : Kerem şemsiyesini yanına alır

olsun. Bu durumda bize verilen “Hava yağmurlu ise Kerem şemsiyesini yanına alır.” önermesi $p \Rightarrow q$ dur. “ise” bağlacının

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

özelliğini kullanarak “Hava yağmurlu ise Kerem şemsiyesini yanına alır.” önermesini “ise” bağlacı olmadan yeniden yazababiliriz.

p' : Hava yağmurlu değil

olduğundan

$p' \vee q$: Hava yağmurlu değil veya Kerem şemsiyesini yanına alır

elde edilir. Dolayısıyla, “Hava yağmurlu ise Kerem şemsiyesini yanına alır” önermesi ile “Hava yağmurlu değil veya Kerem şemsiyesini yanına alır” önermesi denk önermelerdir.

5) “Ceren çalışırsa para kazanır.” önermesinin değilini yazınız.

p : Ceren çalışır.

q : Ceren para kazanır.

olarak alındığında “Ceren çalışırsa para kazanır.” önermesi $p \Rightarrow q$ dur. “ise” bağlacının

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

özelliğini kullanarak

$$(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q' \text{ (DeMorgan kuralından)}$$

elde edilir. Böylece,

q' : Ceren para kazanmaz.

olduğu için “ $p \Rightarrow q$: Ceren çalışırsa para kazanır.” önermesinin değil

$$“(p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q': \text{Ceren çalışır ve para kazanmaz}”$$

olacaktır.

Bölüm Özeti

Bu bölümde ilk olarak önerme kavramı ele alınmıştır. Verilen herhangi bir cümlemin yada ifadenin ne zaman bir önerme olacağı üzerinde durulmuştur. Bir önermenin değilinin ne anlama geldiği ve önermenin doğruluk değeri ile değilinin doğruluk değerinin nasıl değiştiği görülmüştür. Daha sonra birleşik önerme kavramına geçilmiştir. Bir birleşik önermeyi oluşturan alt önermelerin doğruluk değerlerinin birleşik önermenin doğruluk değerini nasıl etkileyeceği tartışılmıştır. Bu noktada birleşik önermeyi oluşturan bağlaçların önemli olduğu görülmüştür. Birleşik önermeyi oluşturmak için “ve”, “veya”, “ise”, “ancak ve ancak” bağlaçları ele alınmıştır. Bu bağlaçların doğruluk tabloları verilmiş, bu tablolar yardımıyla iki veya daha fazla alt önermeden oluşan bir birleşik önermenin doğruluk değeri hesaplanmıştır. Ayrıca, belirtilen bağlaçların birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiş, birkaç önemli özellik verilmiştir.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007

Ünite Soruları

Soru-1 :

Aşağıda verilen önermelerden hangisi “Bir doğal sayının karekökü de bir doğal sayıdır.” önermesine denktir?

(Çoktan Seçmeli)

$\sqrt{n}$ bir doğal sayı ise n de bir doğal sayıdır.

n bir doğal sayıdır ancak ve ancak $\sqrt{n}$ de bir doğal sayıdır.

n bir doğal sayı ise n^2 de bir doğal sayıdır.

n bir doğal sayı ise $\sqrt{n}$ de bir doğal sayıdır.

(•) - Hiçbiri

Cevap-1 :

n bir doğal sayı ise $\sqrt{n}$ de bir doğal sayıdır.

Soru-2 :

Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - x negatif bir tamsayı ve $x+4<0$ ise $x>1$ tür.

(•) - x negatif bir tamsayı ve $x+4<0$ ise $x^2<16$ dır.

(•) - x negatif bir tamsayı ve $x+4 < 0$ ise $x^2 \geq 25$ tir.

(•) - x negatif bir tamsayı ve $x+4 < 0$ ise $x = -4$ tür.

(•) - Hiçbiri

Cevap-2 :

x negatif bir tamsayı ve $x+4 < 0$ ise $x^2 \geq 25$ tir.

Soru-3 :

Aşağıdakilerden hangisi önerme değildir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $2+2=5$

(•) - Bir yılda 5 mevsim vardır.

(•) - Nereye gidiyorsun?

(•) - Bir üçgenin dış açıları toplamı $[[360]]^\circ$ dir.

(•) - Hiçbiri

Cevap-3 :

Nereye gidiyorsun?

Soru-4 :

p, q, r basit önermelerinin doğruluk değerleri sırasıyla 1, 0, 1 ise $(p \vee q) \wedge r' \Rightarrow p$ önermesinin doğruluk değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 0

(•) - 1

(•) - Aynı anda 1 ve 0 olabilir.

(•) - Ne 1 ne de 0 dır.

(•) - Hiçbiri

Cevap-4 :

1

Soru-5 :

$(p \Rightarrow p') \wedge (p' \Rightarrow p)$ önermesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - Hem totoloji hem çelişkidir.

(•) - Ne totoloji ne ne çelişkidir.

(•) - Totolojidir.

(•) - Çelişkidir.

(•) - Hiçbiri

Cevap-5 :

Çelişkidir.

Soru-6 :

$p \Rightarrow (q \vee r)$ önermesi yanlış ise p,q,r nin doğruluk değerleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 0, 0, 0

(•) - 0, 1, 1

(•) - 1, 1, 0

(•) - 0, 0, 1

(•) - 1, 0, 0

Cevap-6 :

1, 0, 0

Soru-7 :

p: Bugün hava güneşli q: Üniversiteye gidiyorum. r: Kuzenimle buluşurum. s: Sınava girerim. olmak üzere “Bugün hava güneşli olmazsa veya üniversiteye gitmezsem kuzenimle buluşur ve sınava girerim.” önermesi aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$

(•) - $(p \wedge q \wedge r) \wedge s$

(•) - $(p \wedge q) \wedge (r \vee s)$

(•) - $(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s) \wedge$

(•) - $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$

Cevap-7 :

$(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$

Soru-8 :

Aşağıdakilerden hangisi $(p' \Rightarrow q)'$ önermesine denktir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $p' \vee q$
- (•) - $p' \wedge q'$
- (•) - $p' \vee q'$
- (•) - $p'' \wedge q'$
- (•) - Hiçbiri

Cevap-8 :

$p' \wedge q'$

Soru-9 :

$(p \wedge r') \Rightarrow (q \vee r)$ yanlış bir önerme olmak üzere q ve r önermeleri de yanlış ise p önermesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - Doğru
- (•) - Yanlış
- (•) - Hem doğru hem yanlış
- (•) - Ne doğru ne yanlış
- (•) - Bir şey söylenemez.

Cevap-9 :

Doğru

2. KÜMELER

2.1. Küme Kavramı

On dokuzuncu yüzyılın sonları yirminci yüzyılın başlarından beri matematiğin en evrensel dili kümeler teorisi olmuştur. Hatta, matematiği tanımının kümeler üzerindeki farklı yapıları (ilişkileri) inceleyen bilim olarak belirtildiği bile bilinmektedir (bkz. Bourbaki, N. The architecture of mathematics in: N. Bourbaki, Elements of the history of mathematics, Springer, New York, 1994). Kümeler teorisinin yaratıcısı Alman matematikçi G. Cantor (1845-1918) ise küme kavramını "Bir kümeyi, sezgimizin veya düşüncemizin belirli, mükemmel bir şekilde ayırt edilebilir nesnelerinin tutarlı bir bütün halinde bir araya gelmesi olarak görüyoruz." şeklinde tanımlamaktadır. Cantor'un açıklaması elbette bir tanım olarak düşünülemez, çünkü bir küme kendisinden daha karmaşık olabilecek (ve her halükarda daha önce tanımlanmamış) kavramlara hitap eder. Bu tanımlamanın amacı, kavramı diğer kavramlarla ilişkilendirerek açıklamaktır. Cantorian (veya genel olarak "naif" olarak adlandırılan) kümeler teorisinin temel varsayımları aşağıdaki ifadelere indirgenir:

1. Bir küme, ayırt edilebilir herhangi nesnelerden oluşabilir.
2. Bir küme, onu oluşturan nesnelerin koleksiyonu tarafından belirlenir.
3. Herhangi bir özellik, o özelliğe sahip nesnelerin kümesini tanımlar.

x bir nesne, P bir özellik olsun ve $P(x)$, x 'in P özelliğine sahip olduğunu gösterebilir. P özelliğine sahip nesnelerin sınıfı $\{x:P(x)\}$ şeklinde gösterilir. Bir kümeyi veya sınıfı oluşturan nesnelere ise o kümenin veya sınıfın elemanları denir.

$x_1, \dots, x_n$ elemanlarından oluşan küme $\{x_1, \dots, x_n\}$ şeklinde gösterilir. Naif kümeler teorisinde "sınıf", "aile" ve "topluluk" kelimeleri "küme" ile eşanlamlı olarak kullanılır. Örneğin,

- "Ben" kelimesindeki "a" harflerinin kümesi
- Onluk sistemdeki rakamların topluluğu
- Fasulyeler ailesi
- Dünya üzerindeki kum tanelerinin kümesi
- Kümelerin ailesi
- Tüm kümelerin kümesi

Bir kümenin tanımındaki olası belirsizlik derecesindeki çeşitlilik, bir kümenin o kadar basit ve zararsız bir kavram olmadığını düşündürür. Bununla birlikte, tüm kümelerin kümesi kavramı basitçe çelişkilidir.

Gerçekten de, bir M kümesi için $P(M)$, M nin kendisini bir eleman olarak içermediği anlamına gelsin. Şimdi P özelliğine sahip kümelerin sınıfı $K = \{M:P(M)\}$ yı düşünelim. K bir küme ise, ya $P(K)$ yada $(P(K))'$ doğrudur. Fakat $P(K)$ doğru olamaz. Çünkü, K bir eleman olarak kendisini, yani K 'yı içerir. O zaman, $(P(K))'$ doğrudur. Fakat bu da K nın eleman olarak K yı içerdiği anlamına gelir ve K nın kendilerini eleman olarak içermeyen kümeler sınıfı olarak tanımlanmasıyla çelişir. Sonuç olarak, K bir küme değildir. Bu, İngiliz Matematikçi B. Russel(1872-1970)'ın naif kümeler kavramının yol açtığı paradokslarından biridir. Modern matematiksel mantıkta bir küme kavramı ayrıntılı bir analize tabi tutulmuştur (yukarıda gördüğümüz gibi iyi bir nedenle). Ancak biz bu analize girmeyeceğiz. Yalnızca, mevcut aksiyomatik kümeler teorisinde bir kümenin, belirli bir özelliğe sahip nesneler topluluğu olarak tanımlandığını bilmemiz bu ders için yeterli olacaktır. Bu özelliklerin açıklaması bir aksiyom sistemi oluşturur. Aksiyomatik kümeler teorisinin özü, verilen kümelerden yeni kümelerin oluşturulabileceği kuralların varsayılmasıdır. Genel olarak, mevcut

aksiyom sistemlerinden herhangi biri, bir yandan naif teoremin bilinen çelişkilerini ortadan kaldıracak ve diğer yandan matematiğin farklı alanlarında ortaya çıkan belirli kümelerle çalışma özgürlüğü sağlayacak şekildedir ve hepsi, matematiksel analizde kelimenin en geniş anlamıyla anlaşılır.

Şimdilik küme kavramına değinmekle yetindikten sonra, yaygın olarak kullanılan küme-teoritik ilişkilerin ve işlemlerin tanımına geçelim.

Kümeleri göstermek için $A, B, X, Y, \dots$ gibi büyük harfler, kümelerin elemanlarını göstermek için ise $a, b, x, y, \dots$ gibi küçük harfler kullanılır. $a \in S$, a nın S kümesinin elemanı olduğunu gösterir. $a, b \in S$ ise hem a hem de b nin S kümesinin elemanları olduğunu gösterir. Burada $\in$ sembolü, "elemanıdır" anlamındadır. $\notin$ sembolü ise "elemanı değildir" anlamındadır.

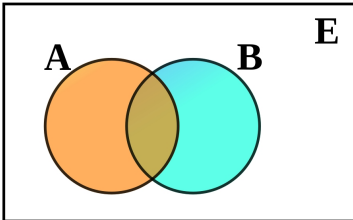
Bir kümeyi göstermek için farklı yollar vardır. Birincisi, kümenin elemanlarını virgülle ayırarak ve parantez içinde listelemektir. İkinci yol ise, kümenin elemanlarını karakterize eden özellikleri belirtmektir. Örneğin,

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ ve } B = \{x: x \text{ bir çift tamsayı ve } x > 0\}$$

Burada A , elemanları 1, 3, 5, 7, 9 rakamlarından oluşan bir küme, B ise pozitif çift tamsayılardan oluşan bir kümedir. B kümesinin içindeki ":" işareti "öyle ki" anlamındadır.

Bir diğer gösteriliş ise Venn şeması gösterilişidir. Venn şeması, kümenin elemanlarını kapalı bir eğri içine yazılarak gösterilmesidir. Bu derste genellikle evrensel kümeleri bir dikdörtgen ile, diğer kümeleri de dikdörtgenin içindeki bir çemberler ile göstereceğiz.

Örneğin,



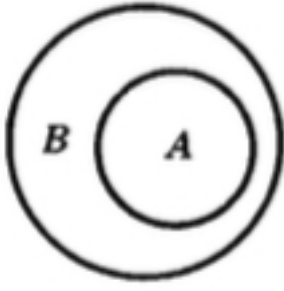
Bu şemadan iki farklı A ve B kümesinin A ya ait B ye ait olmayan elemanların bölgesi turuncu, B ye ait A ya ait olmayan elemanların bölgesi yeşil, her ikisine de ait elemanların bölgesi sarı ile gösterilmiştir.

Alt Küme

Bir A kümesinin her elemanı aynı zamanda bir B kümesinin elemanı ise, yani her $a \in A$ için $a \in B$ ise A kümesine B kümesinin alt kümesi denir ve

$$A \subseteq B \text{ yada } B \supseteq A$$

şeklinde gösterilir. A kümesinin B kümesinin alt kümesi olması, " A kümesi B tarafından içerilir" yada " B kümesi A kümesini içerir" şeklinde de ifade edilebilir.



İki küme birbirlerini içeriyorsa, başka bir deyişle bu iki küme aynı elemanlara sahip iseler bu iki küme birbirine eşittir denir, yani

$A = B$ olması ancak ve ancak $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olmasıdır.

A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse, yani A nın B ye ait olmayan en az bir elemanı varsa bu durum $A \not\subseteq B$ şeklinde gösterilir.

Eğer $A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise A ya B nin esas alt kümesi denir ve $A \subset B$ ile gösterilir.

Örnek:

$A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}: x \text{ çift tamsayı}\}$ kümeleri verilsin.

A nın her elemanı çift tamsayı olduğundan $A \subseteq C$ dir. Öte yandan B nin 1,3 elemanları A ya ait olmadığından $B \not\subseteq A$ dır. Benzer şekilde A nın 6,8,10 elemanları B ye ait olmadığından $A \not\subseteq B$ dır. A, B ve C herhangi üç küme olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

4. $A \subseteq A$

5. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise $A = B$ dir.

6. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir.

Evrensel Küme, Boş Küme

Kümeler teorisinde, tüm kümelerin sabit ve geniş bir kümeye ait olduğu kabul edilir. Bu kümeye evrensel küme denir ve E ile gösterilir. E bir evrensel küme ve P bir özellik olmak üzere E nin bir elemanı P özelliğini sağlamayabilir. Örneğin,

$$S = \{x: x \text{ bir tamsayı ve } x^2 = 5\}$$

kümesinin hiç elemanı yoktur. Elemanı olmayan kümelere boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir.

Boş küme tektir, yani iki A ve B kümesi boş küme ise $A = B$ dir.

Boş küme diğer kümelerin alt kümesidir. Bu yüzden her A kümesi için

$$\emptyset \subseteq A \subseteq E$$

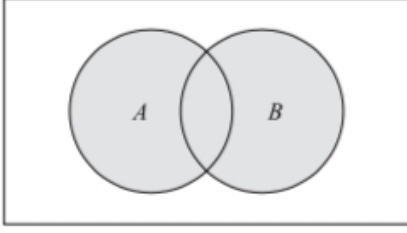
kapsamaları doğrudur.

2.2. Küme İşlemleri

A ve B iki küme olsun. A nın ve B nin tüm elemanlarının oluşturduğu kümeye A ve B kümesinin birleşim kümesi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir, yani

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

dir.

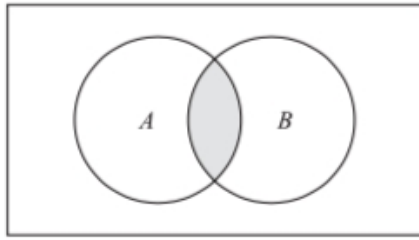


Gölge alan $A \cup B$ dir.

Hem A ya hem B ye ait elemanların oluşturduğu kümeye A ile B nin kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ ile gösterilir, yani

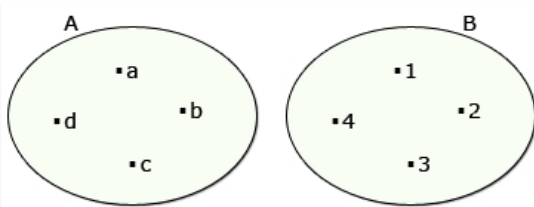
$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

dir.



Gölge alan $A \cap B$ dir.

A ve B kümelerinin ortak elemanı yok ise, yada buna denk olarak, iki kümenin kesişimi tanımından $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B ye ayrık kümeler denir.



Buradaki A ve B kümelerinin ortak elemanı olmadığından ayrık kümelerdir.

Eğer

$$S = A \cup B \text{ ve } A \cap B = \emptyset$$

ise S ye A ve B nin ayrık birleşimi denir.

Örnek: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ ve $C = \{b, h, k, l, m\}$ üç küme olmak üzere

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g\}, \quad A \cap B = \{c,d\}$$

$$A \cup C = \{a,b,c,d,h,k,l,m\}, \quad A \cap C = \{b\}$$

$$B \cup C = \{b,c,d,e,f,g,h,k,l,m\}, \quad B \cap C = \emptyset$$

B ve C ayrık kümelerdir.

A ve B iki küme olmak üzere

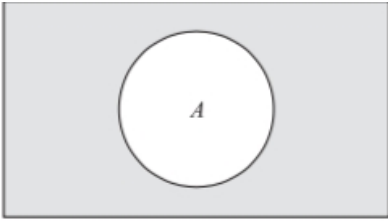
$$1. A \cap B \subseteq A \text{ ve } A \cap B \subseteq B$$

$$2. A \subseteq A \cup B \text{ ve } B \subseteq A \cup B$$

E bir evrensel küme olmak üzere bir A kümesinin tümleyeni, E ye ait fakat A ya ait olmayan elemanların kümesidir ve A^C ile gösterilir, yani

$$A^C = \{x: x \in E \text{ ve } x \notin A\}$$

dir.

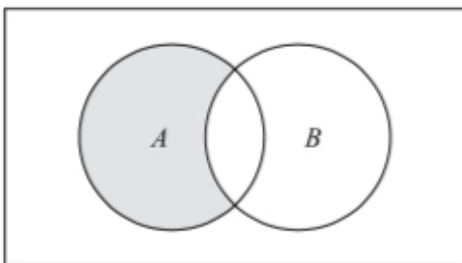


Gölge alan A^C dir.

A ve B iki küme olmak üzere, A ya ait fakat B ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye B nin A ya göre tümleyeni yada A nın B farkı denir ve $A \setminus B$ ile gösterilir, yani

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

dir.

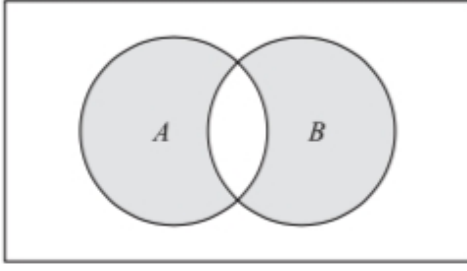


Gölge alan $A \setminus B$ dir.

A ve B kümelerinden birine ait olan fakat aynı anda hem A ya hem B ye ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye ise A ve B nin simetrik farkı denir ve $A \oplus B$ ile gösterilir, yani

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ veya } A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

dır.



Gölge alan $A \oplus B$ dir.

Örnek: $E = \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ evrensel küme, $A = \{5,6,7,8\}$, $B = \{7,8,9,10\}$ ve $C = \{1,3,5,7,9,\dots\}$ olsun.

$$A^C = \{1,2,3,4,9,10,11,\dots\}, \quad B^C = \{1,2,3,4,5,6,11,12,13,\dots\}, \quad C^C = \{2,4,6,8,\dots\}$$

$$A \setminus B = \{5,6\} \quad A \setminus C = \{6,8\} \quad B \setminus C = \{8,10\}$$

$$B \setminus A = \{9,10\} \quad C \setminus A = \{1,3,9,11,\dots\} \quad C \setminus B = \{1,3,5,11,13,\dots\}$$

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{5,6,9,10\} \quad B \oplus C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B) = \{1,3,5,8,10,11,13,\dots\}$$

$$A \oplus C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{1,3,6,8,9,11,\dots\}$$

Küme İşlemlerinin Bazı Özellikleri:

1. $A \cup A = A$ ve $A \cap A = A$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ve $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup \emptyset = A$ ve $A \cap E = A$
6. $A \cup E = E$ ve $A \cap \emptyset = \emptyset$
7. $(A^C)^C = A$
8. $A \cup A^C = E$ ve $A \cap A^C = \emptyset$
9. $E^C = \emptyset$ ve $\emptyset^C = E$
10. (DeMorgan Kuralları) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

2.3. Sonlu Kümeler ve Eleman Sayıları

Bir A kümesi boş bir küme ise yada m pozitif bir tamsayı olmak üzere tam m tane elemanı varsa A kümesine sonlu küme denir. Aksi takdirde, A ya sonsuz küme denir.

Bir A kümesinin eleman sayısı $n(A)$ ile gösterilir.

Örnek:

1. A kümesi Türk alfabesinin harflerinden oluşan bir küme olsun. Türk alfabesinde 29 harf olduğundan A sonlu bir kümedir ve $n(A) = 29$ dur.

2. $B = \{x: x \text{ bir tamsayı ve } 0 \leq x < 6\}$ kümesinin elemanları 0,1,2,3,4,5 rakamlarından oluşmaktadır. Dolayısıyla B sonlu bir kümedir ve $n(B) = 6$ dır.

3. Boş kümenin elemanı olmadığından $n(\emptyset) = 0$ dır.

Özellikler:

1. A ve B sonlu ve ayrık iki küme ise $A \cup B$ de sonludur ve

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

dir.

2. A ve B sonlu iki küme ise

$$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$$

dir.

3. A ve B sonlu iki küme ise $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümeleri de sonludur ve

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

dir.

Örnek: Bölümümüzün Matematik dersini 30 öğrenci, Türk Dili dersini 18 öğrenci ve her iki dersi de 6 öğrenci alıyorsa

1. Sadece Matematik dersini alan öğrencilerin sayısını bulalım.

Matematik dersini alan öğrencilerin kümesi A , Türk Dili dersini alan öğrencilerin kümesi B olsun. Soruda verilenlere göre $n(A) = 30$, $n(B) = 18$, $n(A \cap B) = 6$ dır. O halde Türk dili dersini almayan Matematik öğrencilerinin kümesi $A \setminus B$ olacağından bu kümenin eleman sayısı

$$n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B) = 30 - 6 = 24$$

dür.

2. Sadece Türk dili dersini alan öğrenci sayısını bulalım. Sadece Türk dili dersini alan öğrencilerin kümesi $B \setminus A$ olacağından

$$n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B) = 18 - 6 = 12$$

dür.

3. Matematik veya Türk dili yada her ikisini alan öğrenci sayısını bulalım. Matematik veya Türk dili yada her ikisini alan öğrencilerin kümesi $A \cup B$ dir. Dolayısıyla

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 18 - 6 = 42$$

bulunur.

4. Tek bir dersi alan öğrenci sayısını bulalım: Tek bir dersi alan öğrencilerin kümesi $A \oplus B$ dir. Dolayısıyla, ilk iki şıktan

$$n(A \oplus B) = n((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = n((A \setminus B)) + n((B \setminus A)) = 24 + 12 = 36$$

bulunur.

2.4. Çözümlü Sorular

1. $\{a,b,c\}, \{c,b,c,a\}, \{b,a,b,c\}, \{b,c,a,b\}$ kümelerinden hangileri birbirlerine eşittir?

Verilen tüm kümeler birbirlerine eşittir. Çünkü elemanlarının sırası ve tekrarlı olması o kümeyi değiştirmez.

2. $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ doğal sayılar kümesi olmak üzere aşağıdaki kümelerin elemanlarını yazınız.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x < 7\}$

A kümesi, elemanları 2 ile 7 arasında olan doğal sayılardan oluşur, yani

$$A = \{3,4,5,6\} \text{ dır.}$$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ tek ve } x < 9\}$

B kümesi, elemanları 9 dan küçük tek doğal sayılardan oluşur, yani

$$B = \{1,3,5,7\} \text{ dir.}$$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} : x + 5 = 3\}$

$x + 5 = 3$ denklemini sağlayan bir doğal sayı olmadığından $C = \emptyset$, boş kümedir.

3. $A = \{5,6,7,8\}$ olmak üzere

a) A kümesinin $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ tek}\}$ kümesinin bir alt kümesi olmadığını gösteriniz.

$6,8 \in A$ elemanları tek doğal sayılar olmadığı için B kümesine ait değildir, yani $6,8 \notin B$ dir. Bu yüzden $A \not\subseteq B$ dir.

b) A kümesinin $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ kümesinin bir öz alt kümesi olduğunu gösteriniz.

A nın her elemanı C kümesine ait olduğundan $A \subseteq C$ dir. Öte yandan, $1 \in C$ fakat $1 \notin A$ olduğundan A, C kümesinin bir öz alt kümesidir.

4. $B \setminus A = B \cap A^C$ olduğunu gösteriniz.

Bu eşitlikten, kümelerde fark işleminin keşişim ve tümleyen işlemleri cinsinden yazılabileceğini görürüz.

İki kümenin eşitliği tanımından, $B \setminus A = B \cap A^C$ olduğunu göstermek için

$(B \setminus A) \subseteq (B \cap A^C)$ ve $(B \cap A^C) \subseteq (B \setminus A)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(x \in B \setminus A) \Leftrightarrow (x \in B, x \notin A) \Leftrightarrow (x \in B, x \in A^C) \Leftrightarrow x \in (B \cap A^C)$$

önermesinin " $\Rightarrow$ " tarafı $B \setminus A \subseteq B \cap A^C$ olduğunu, " $\Leftarrow$ " tarafı $B \cap A^C \subseteq B \setminus A$ olduğunu gösterir. Buradan $B \setminus A = B \cap A^C$ elde edilir.

5. 140 kişilik Bilgisayar Programlama bölümünde Algoritma dersini alan öğrencilerin sayısı 60, Web Tasarımı dersini alan öğrencilerin sayısı 45, her iki dersi birden alan öğrencilerin sayısı 20 dir.

a) Algoritma ve Web Tasarımı derslerinden en az birini alan öğrenci sayısı kaçtır?

b) Algoritma ve Web Tasarımı derslerinden tam bir tane alan öğrenci sayısı kaçtır?

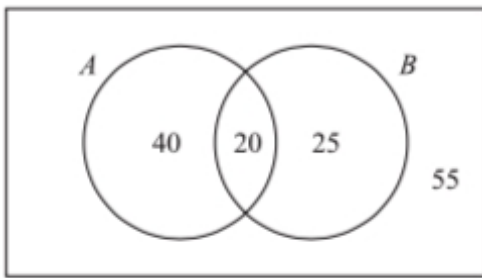
c) Her iki dersi de almayan öğrenci sayısı kaçtır?

A , Algoritma dersini alan öğrencilerin kümesi

B Web Tasarımı dersini alan öğrencilerin kümesi olmak üzere

$$n(A) = 60, \quad n(B) = 45, \quad n(A \cap B) = 20$$

dir. Venn şeması ile gösterecek olursak



a) Algoritma ve Web Tasarımı derslerinden en az birini alan öğrencilerin kümesi $A \cup B$ dir. Venn şemasından

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 60 + 45 - 20 = 85$$

bulunur.

b) Algoritma ve Web Tasarımı derslerinden tam bir tane alan öğrencilerin kümesi $A \oplus B$ dir. Venn şemasından

$$n(A \oplus B) = n((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = n(A \setminus B) + n(B \setminus A) = 40 + 25 = 65$$

bulunur.

c) Her iki dersi de almayan öğrencilerin kümesi $(A \cup B)^C$ dir.

$$n((A \cup B)^C) = n(E \setminus (A \cup B)) = n(E) - n(A \cup B) = 140 - 85 = 55$$

bulunur.

Bölüm Özeti

Bu bölümde küme kavramı ele alınmıştır. Elimizdeki bir topluluğun küme olması için hangi özellikleri taşıması gerektiği açıklanmıştır. Alt küme kavramı ile bir kümenin elemanlarının başka bir kümeye de ait olabileceği gösterilirken, ayrık küme kavramıyla ortak elemanı olmayan kümelerin de var olabileceği belirtilmiştir. Aynı elemanlara sahip kümelerin de eşit küme olarak tanımlandığı gösterilmiştir.

Daha sonra, kümeleri ifade edebilmek için liste yöntemi ve Venn şeması gibi uygun gösterimler verilmiş ve incelenmiştir. Kesişim, birleşim, tümleyen, fark, simetrik fark gibi küme işlemleri tanımlanmış, özellikleri gösterilmiştir. Bu işlemlerin birbirleriyle olan ilişkileri gösteren eşitlikler verilmiştir. Küme işlemlerinin Venn şeması ve liste yöntemi ile nasıl gösterildiği de ele alınmıştır.

Bunlar dışında, kümelerin eleman sayılarının nasıl hesaplanacağı konusu da ele alınmıştır. Örneğin, sonlu elemana sahip iki kümenin birleşiminin oluşturduğu kümenin eleman sayısının hesaplanması için bir kural verilmiştir.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2nd edition, Springer, 2015
2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007

Ünite Soruları

Soru-1 :

Aşağıdakilerden hangisi $A=\{2,4,6,8,10,12,14\}$ kümesinin alt kümesidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\{0,2,8,10,14\}$

(•) - $\{0\}$

(•) - $\{6,2,4\}$

(•) - $\{8,9,10,14\}$

(•) - Hiçbiri

Cevap-1 :

$\{6,2,4\}$

Soru-2 :

$A=\{a,b,c,d\}$ ve $B=\{c,d,e,f,g,h\}$ olmak üzere $A \cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - a,b,c,d,e,f,g,h}

(•) - c,d}

(•) - b,c,d}

(•) - c,d,e,f,g}

Cevap-2 :

c,d}

Soru-3 :

$E=\{-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8\}$ evrensel küme olmak üzere $A=\{-8\}$ kümesinin tümleyeni aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

{

$\{-8, -6, -4, 0, 2, 4, 6, 8\}$

$\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

$\{0, 2, 4\}$

$\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

$\emptyset$

Cevap-3 :

$\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

Soru-4 :

$A=\{1,2,x,y,z,a\}$ kümesi için

I. $n(A)=5$

II. $1 \in A$

III. $2 \notin A$

IV. $5 \notin A$

iddialarından hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - I

(•) - II, III

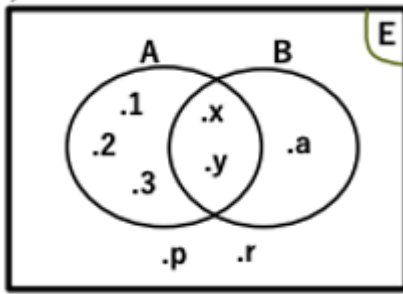
(•) - III, IV

(•) - II, IV

(•) - I, II, IV

Cevap-4 :

II, IV

Soru-5 :

Yukarıdaki Venn şemasına göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

(Çoktan Seçmeli)

$$A = \{1, 2, 3, x, y\}$$

$$A \cap B = \{x, y\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, x, y, a, p, r\}$$

$$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$$

$$B \setminus A = \{a\}$$

Cevap-5 :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, x, y, a, p, r\}$$

Soru-6 :

20 kişilik bir sınıfta Türkçe bilmeyen 10 kişi, Fransızca bilmeyen 12 kişi, her iki dili de bilmeyen 3 kişi varsa her iki dili bilen kaç kişi vardır?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 1

(•) - 3

(•) - 4

(•) - 5

(•) - 6

Cevap-6 :

1

Soru-7 :

Aşağıdaki özelliklerden hangisi yanlıştır?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $A \cup A = A$

(•) - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(•) - $A \cup B = B \cup A$

(•) - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(•) - $A \cup \emptyset = \emptyset$

Cevap-7 :

$A \cup \emptyset = \emptyset$

Soru-8 :

$A = \{x \in \mathbb{R} : 12 \leq x \leq 25\}$ kümesi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $n(A) = 14$

(•) - $12 \in A$

(•) - $25 \in A$

(•) - $45/2 \in A$

(•) - $51/2 \in A$

Cevap-8 :

$51/2 \in A$

Soru-9 :

80 kişilik bir yaz okulunda 32 kişi satranç oynuyor. Satranç bilmeyen erkek sayısı 8 olduğuna göre satranç bilmeyen kaç kız vardır?

(oktan Seçmeli)

(•) - 40

(•) - 15

(•) - 47

(•) - 35

(•) - 23

Cevap-9 :

40

3. REEL SAYILAR

3.1. Reel Sayılar Kümesinin Tanımı

Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathbb{R}$ kümesine reel sayılar kümesi ve elemanlarına da reel sayılar denir:

I. (TOPLAM) $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü, yani $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R}\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine $(x,y) \rightarrow x + y$

şeklinde tanımlanan toplam işlemi aşağıdaki koşulları sağlar:

1. Her $x \in \mathbb{R}$ elemanı için

$$x + 0 = 0 + x = x$$

olacak şekilde $0 \in \mathbb{R}$ (sıfır eleman) vardır.

2. Her $x \in \mathbb{R}$ elemanına karşılık

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

olacak şekilde $-x \in \mathbb{R}$ (x in negatifi yada toplama göre tersi) vardır.

3. Her $x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

dir.

4. Her $x,y \in \mathbb{R}$ için

$$x + y = y + x$$

dir.

II. (ÇARPIM) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü, yani $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y): x,y \in \mathbb{R}\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine $(x,y) \rightarrow x \cdot y$

şeklinde tanımlanan çarpım işlemi aşağıdaki koşulları sağlar:

5. Her $x \in \mathbb{R}$ elemanı için

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

olacak şekilde sıfırdan farklı $1 \in \mathbb{R}$ (birim eleman) vardır.

6. Sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}$ elemanına karşılık

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$

olacak şekilde $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (x in tersi yada çarpıma göre tersi) vardır.

7. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

dir.

8. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$x \cdot y = y \cdot x$$

dir.

III. (TOPLAM VE ÇARPIM ARASINDA İLİŞKİ) Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

dir.

IV. (SIRALAMA) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin elemanları arasında “ $\leq$ ” bağıntısı vardır, yani $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ olup olmadığı tanımlanabilir. “ $\leq$ ” bağıntısı aşağıdaki şartları sağlar:

- a) Her $x \in \mathbb{R}$ elemanı için $x \leq x$
- b) $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$
- c) $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$
- d) Her $x, y \in \mathbb{R}$ elemanları için $(x \leq y) \vee (y \leq x)$

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bu “ $\leq$ ” bağıntısına eşitsizlik denir.

V. (TOPLAM VE SIRALAMA ARASINDA İLİŞKİ) Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$$

VI. (ÇARPIM VE SIRALAMA ARASINDA İLİŞKİ) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y)$$

VII. (TAMLIK) X ve Y , $\mathbb{R}$ nin boştan farklı ve her $x \in X$ ve her $y \in Y$ elemanları için $x \leq y$ eşitsizliğini sağlayan iki alt kümesi ise her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için

$$x \leq c \leq y$$

olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır.

Toplam işleminin sonuçları:

1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde tek bir sıfır eleman vardır.

2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin her elemanı tek bir negatife (toplama göre terse) sahiptir.

3. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$a + x = b$$

denklemini

$$x = b + (-a)$$

şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

Çarpım işleminin sonuçları:

1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde tek bir birim eleman vardır.

2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin sıfırdan farklı her elemanı tek bir terse (çarpıma göre terse) sahiptir.

3. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$a \cdot x = b$$

denklemini

$$x = b \cdot a^{-1}$$

şeklinde tek bir çözüme sahiptir.

Toplam ve çarpım arasındaki ilişkinin sonuçları:

1. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

2. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$$

3. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$-x = (-1) \cdot x$$

4. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(-1) \cdot (-x) = x$$

5. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$$

Sıralamanın sonuçları:

1. Her $x, y \in \mathbb{R}$ elemanları aşağıdaki durumlardan sadece bir tanesine sahiptir:

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

2. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$(x < y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x < z)$$

$$(x \leq y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$$

Toplam ve çarpım işlemleri ile sıralama arasındaki ilişkinin sonuçları:

1. Her $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ için

$$(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z)$$

$$(0 < x) \Rightarrow (-x < 0)$$

$$(x \leq y) \wedge (z \leq t) \Rightarrow (x + z \leq y + t)$$

$$(x < y) \wedge (z < t) \Rightarrow (x + z < y + t)$$

2. Her $x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < x \cdot y)$$

$$(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (0 < x \cdot y)$$

$$(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (x \cdot y < 0)$$

$$(x < y) \wedge (0 < z) \Rightarrow (x \cdot z < y \cdot z)$$

$$(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (y \cdot z < x \cdot z)$$

3. $0 < 1$ dir.

4. Sıfırdan farklı her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$(0 < x) \Rightarrow (0 < x^{-1})$$

$$(0 < x) \wedge (x < y) \Rightarrow (0 < y^{-1}) \wedge (y^{-1} < x^{-1})$$

Sıfırdan büyük reel sayılara pozitif sayılar denir ve $\mathbb{R}^+$ ile gösterilir. Sıfırdan küçük reel sayılara negatif sayılar denir ve $\mathbb{R}^-$ ile gösterilir, yani

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$$

$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$$

dır.

Toplam ve çarpım işlemleri ile sıralama arasındaki ilişkinin sonuçlarından $0 < 1$ olduğundan 1 in pozitif sayı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, yine aynı sonuçlardan pozitif iki reel sayının çarpımının pozitif, negatif iki reel sayının çarpımının yine pozitif, bir pozitif ve bir negatif reel sayının çarpımının negatif ve sıfırdan farklı pozitif bir reel sayının tersinin de pozitif olduğunu da görürüz.

Şimdi reel sayıların en önemli sınıflarını ve bu sınıflarda reel sayılar üzerinde tanımlı işlemlerin hesaplamalarını görelim.

3.2. Doğal Sayılar ve Matematiksel Tümevarım Prensibi

$1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, \dots$ formundaki reel sayılar sırasıyla $1, 2, 3, \dots$ ile gösterilir ve bu formda oluşmuş reel sayılara doğal sayılar denir ve doğal sayıların kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir, yani

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, n + 1, \dots\}$$

dir ve $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dir.

Doğal sayıların bu tanımı, doğal sayılara aşina olan ve kullanan biri için, örneğin onluk hesaplama sisteminde, anlamlı olacaktır. Fakat bu tanımlamayı anlamlandıran asıl nokta Matematiksel Tümevarım Prensibi'dir.

Matematiksel Tümevarım Prensibi:

$E, \mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin

i. $1 \in E$

ii. Her $x \in E$ için $x + 1 \in E$

koşullarını sağlayan bir alt kümesi ise $E = \mathbb{N}$ dir.

Bu prensip kullanılarak, bundan sonra doğal sayılar ile ilgili sürekli olarak kullanacağımız birkaç özellik verilebilir:

Örnek: İki doğal sayının toplamı ve çarpımı da bir doğal sayıdır.

Bu özelliği kanıtlayalım:

$m, n \in \mathbb{N}$ olsun. İlk olarak, $(m + n) \in \mathbb{N}$ olduğunu gösterelim:

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \text{Her } m \in \mathbb{N} \text{ için } (m + n) \in \mathbb{N}\}$$

kümesini alalım. Dikkat ediniz ki bu küme herhangi bir doğal sayı ile toplandığında bir doğal sayı oluşturan elemanların kümesidir. Bu kümenin $\mathbb{N}$ ye eşit olduğunu gösterirsek tüm doğal sayıların toplamlarının doğal sayı olduğunu göstermiş oluruz. $E = \mathbb{N}$ olduğunu Matematiksel Tümevarım Prensibinden gösterelim:

i. $1 \in E$ dir. Çünkü doğal sayıların tanımından her $m \in \mathbb{N}$ için $m \in \mathbb{N}$ ise $m + 1 \in \mathbb{N}$ dir.

ii. $n \in E$ alalım. $(n + 1) \in E$ olduğunu gösterelim. $n \in E$ ise her $m \in \mathbb{N}$ için $(m + n) \in \mathbb{N}$ dir. Doğal sayıların tanımından $(m + n) \in \mathbb{N}$ ise $(m + n) + 1 \in \mathbb{N}$ dir. Reel sayıların özelliklerinden $(n + 1) + m = (m + n) + 1$ olduğundan $(n + 1) + m \in \mathbb{N}$ elde edilir. Bu da $(n + 1) \in E$ olduğunu gösterir.

E kümesi Matematiksel Tümevarım Prensiplerinin iki şartını da sağladığından $E = \mathbb{N}$

dir.

$(m \cdot n) \in \mathbb{N}$ olduğunu Çözümlü Sorular kısmında yapacağız.

3.3. Rasyonel ve İrrasyonel Sayılar

Tamsayılar

Doğal sayıların kümesi $\mathbb{N}$, doğal sayıların negatiflerinin (toplama göre terslerinin) kümesi ve sıfırın birleşimlerinin kümesine tamsayılar kümesi denir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir, yani

$$\mathbb{Z} = \{..., -(n + 1), -n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, n + 1, ...\}$$

dir.

Özellik: İki tamsayının toplamı ve çarpımı da bir tamsayıdır.

İki $m, n \in \mathbb{Z}$ için $m = n \cdot k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ varsa m, n ye bölünür yada m, n nin bir katıdır yada n, m nin bir bölenidir denir.

Bir $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$ doğal sayısının 1 den ve kendisinden başka böleni yoksa p asal sayı denir.

Aritmetiğin Temel Teoremi: Her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$$

olacak şekilde $p_1, p_2, ..., p_k$ asal sayıların çarpımı şeklinde yazılır ve bu yazılış çarpanların sırası göz ardı edildiğinde tek türdür.

1 ve -1 den başka ortak böleni olmayan $m, n \in \mathbb{Z}$ tamsayılarına aralarında asal sayılar denir.

Rasyonel Sayılar

$m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m \cdot n^{-1}$ formundaki sayılara rasyonel sayılar denir. Rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

Her (m, n) tamsayı ikilisi $n \neq 0$ ise bir $q = m \cdot n^{-1}$ rasyonel sayısı üretir.

$q = m \cdot n^{-1}$ sayısı, $\frac{m}{n}$ şeklinde gösterilen m ve n nin bölümü şeklinde de yazılır ve bu gösterilişe kesir denir.

İrrasyonel Sayılar

Rasyonel olmayan reel sayılara irrasyonel sayılar denir. İrrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{I}$

ile gösterilir, yani $\mathbb{I} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dir.

Örnek: $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{5}, \log 3$ irrasyonel sayıdır.

Aralıklar: $\mathbb{R}$ nin, elemanları herhangi iki sayı arasında kalan ve en az iki sayı içeren alt kümelerine aralık denir ve şöyle gösterilirler:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: ab açık aralığı



$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: ab kapalı aralığı



$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$: b yi içeren ab yarı-açık aralığı



$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$: a yı içeren ab yarı-açık aralığı



$b - a$ ya bir ab aralığının uzunluğu denir ve bir I aralığının uzunluğu $|I|$ ile gösterilir.

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ açık aralık



$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ kapalı aralık



$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$ açık aralık



$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ kapalı aralık



$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ hem açık hem kapalı aralık



aralıklarına da sınırsız ya da sonsuz aralıklar denir.

Örnekler:

a) $2x + 1 < x + 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$2x + 1 < x + 2$ Her iki tarafa 1 ekleyelim

$2x < x + 1$ Her iki taraftan x çıkaralım

$$x < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla çözüm kümesi $(-\infty, 1)$ açık aralıktır.

b) $-\frac{x}{5} < 3x - 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$-\frac{x}{5} < 3x - 1$ Her iki tarafı 5 ile çarpalım

$-x < 15x - 5$ Her iki tarafı x ile toplayalım

$0 < 16x - 5$ Her iki tarafı 5 ile toplayalım

$5 < 16x$ Her iki tarafı 16 ile bölelim

$$\frac{5}{16} < x$$

elde edilir. Dolayısıyla çözüm kümesi $(\frac{5}{16}, +\infty)$ açık aralıktır.

3.4. Mutlak Değer

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

sayısına x in mutlak değeri denir.

Örnek: $3 > 0$ pozitif bir sayı olduğundan $|3| = 3$, $|0| = 0$

$$-5 < 0 \text{ negatif bir sayı olduğundan } |-5| = -(-5) = 5$$

Geometrik olarak x in mutlak değeri reel sayılar doğrusu üzerinde x ile 0 arasındaki uzaklıktır. Uzaklıklar daima ya pozitif yada sıfır olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $|x| \geq 0$ dır yada $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır.

Ayrıca reel sayı doğrusu üzerinde herhangi x ve y sayısı arasındaki uzaklık $|x - y|$ dir.

Özellikler:

$$1. |-x| = |x|$$

$$2. |xy| = |x||y|$$

$$3. y \neq 0 \text{ olmak üzere } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$4. (\text{Üçgen Eşitsizliği}) |x + y| \leq |x| + |y|$$

Uyarı: $|-x| = -|x|$ eşitliği her zaman doğru değildir. Örneğin $|-5| = 5$ iken $-|5| = -5$ dir.

Mutlak Değer ve Aralıklar

$a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$1. |x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ yada } x = -a$$

$$2. |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

Yani, x in 0 a uzaklığının bir a pozitif sayısından küçük olmasının anlamı, x in $-a$ ile a arasında olmasıdır.

$$3. |x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ yada } x < -a$$

$$4. |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$5. |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ yada } x \leq -a$$

Örnekler:

$$1. |3x - 2| = 5 \text{ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.}$$

Mutlak değerin “ $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ yada $x = -a$ ” özelliğinden

$$|3x - 2| = 5 \text{ ise } 3x - 2 = 5 \text{ yada } 3x - 2 = -5 \text{ dir.}$$

$$3x - 2 = 5 \text{ ise } 3x = 7 \text{ ve buradan } x = \frac{7}{3} \text{ bulunur.}$$

$$3x - 2 = -5 \text{ ise } 3x = -3 \text{ ve buradan } x = -1 \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla $|3x - 2| = 5$ denkleminin çözüm kümesi $\left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$ dür.

$$2. \left|4 + \frac{1}{x}\right| < 2 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

Mutlak değerin “ $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ ” özelliğinden $\left|4 + \frac{1}{x}\right| < 2$ ise

$$-2 < 4 + \frac{1}{x} < 2 \text{ dir.}$$

Eşitsizliğin her tarafından 4 çıkaralım.

$$-6 < \frac{1}{x} < -2$$

Her iki tarafının tersini alalım.

$$-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{6}$$

bulunur, yani $\left|4 + \frac{1}{x}\right| < 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$ dir.

3.5. Tam Değer

$x \in \mathbb{R}$ sayısından küçük yada eşit olan en büyük tamsayıya x in tam değeri denir ve $\llbracket x \rrbracket$ ile gösterilir.

Örnek: $\llbracket 2,5 \rrbracket = 2$ dir. Çünkü 2,5 sayısından küçük olan en büyük tamsayı 2 dir.

$\llbracket -2,8 \rrbracket = -3$ dür. Çünkü -2,8 sayısından küçük olan en büyük tamsayı -3 dür

$\llbracket 1 \rrbracket = 1$ dir. Çünkü 1 bir tamsayıdır ve tam değeri kendisidir.

Özellikler:

1. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x = \llbracket x \rrbracket + k$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ vardır.

Bir başka deyişle,

$$\llbracket x \rrbracket = a \text{ ise } a \leq x < a + 1 \text{ dir.}$$

2. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\llbracket x + y \rrbracket \geq \llbracket x \rrbracket + \llbracket y \rrbracket$$

dir.

3. $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\llbracket x + m \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + m$$

dir.

$a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

4. $\llbracket x \rrbracket > a$ ise $x \geq a + 1$ dir.

5. $\llbracket x \rrbracket \geq a$ ise $x \geq a$ dir.

6. $\llbracket x \rrbracket < a$ ise $x < a$ dir.

7. $\llbracket x \rrbracket \leq a$ ise $x < a + 1$ dir.

Örnekler:

1. $\llbracket x - 4 \rrbracket = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Tam değerin “ $\llbracket x \rrbracket = a$ ise $a \leq x < a + 1$ ” özelliğinden

$$\llbracket x - 4 \rrbracket = 2 \text{ ise } 2 \leq x - 4 < 3 \text{ tür.}$$

$2 \leq x - 4 < 3$ Her iki tarafa 4 ekleyelim

$$6 \leq x < 7$$

elde edilir, yani $\llbracket x - 4 \rrbracket = 2$ denkleminin çözüm kümesi $[6,7)$ dur.

2. $\llbracket x - 4 \rrbracket > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Tam değerin " $\llbracket x \rrbracket > a$ ise $x \geq a + 1$ " özelliğinden

$\llbracket x - 4 \rrbracket > 2$ ise $x - 4 \geq 3$, yani $x \geq 7$ elde edilir. Dolayısıyla $\llbracket x - 4 \rrbracket > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $[7, +\infty)$ aralığıdır.

3.6. Çözümlü Sorular

1. İki doğal sayının çarpımı da bir doğal sayı olduğunu Matematiksel Tümevarım Prensibini kullanarak gösteriniz.

$m, n \in \mathbb{N}$ olsun. $(m \cdot n) \in \mathbb{N}$ olduğunu gösterelim:

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \text{Her } m \in \mathbb{N} \text{ için } (m \cdot n) \in \mathbb{N}\}$$

kümesini alalım. Dikkat ediniz ki bu küme herhangi bir doğal sayı ile çarpıldığında bir doğal sayı oluşturan elemanların kümesidir. Bu kümenin $\mathbb{N}$ ye eşit olduğunu gösterirsek tüm doğal sayıların çarpımlarının doğal sayı olduğunu göstermiş oluruz. $E = \mathbb{N}$ olduğunu Matematiksel Tümevarım Prensibinden gösterelim:

i. $1 \in E$ dir. Çünkü birim elemanın tanımında her $m \in \mathbb{N}$ için $m \in \mathbb{N}$ ise $m \cdot 1 \in \mathbb{N}$ dir.

ii. $n \in E$ alalım. $(n + 1) \in E$ olduğunu gösterelim. $n \in E$ ise her $m \in \mathbb{N}$ için $(m \cdot n) \in \mathbb{N}$ dir. Toplam ve çarpım arasındaki ilişkiden $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \cdot 1 = m \cdot n + m$ dir. $m, m \cdot n \in \mathbb{N}$ olduğundan ve iki doğal sayının toplamının da bir doğal sayı olduğundan (Örnek olarak yukarıda göstermiştik), $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \in \mathbb{N}$ elde edilir. Bu da $(n + 1) \in E$ olduğunu gösterir.

E kümesi Matematiksel Tümevarım Prensibinin iki şartını da sağladığından $E = \mathbb{N}$ dir.

2. $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow ((n - 1) \in \mathbb{N})$ olduğunu Matematiksel Tümevarım Prensibini kullanarak gösteriniz.

$$E = \{n - 1 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n \neq 1\}$$

kümesinin $\mathbb{N}$ ye eşit olduğunu gösterirsek soruda isteneni elde etmiş oluruz. $E = \mathbb{N}$ olduğunu göstermek için Matematiksel Tümevarım Prensibini kullanalım.

i. $1 \in E$ dir. Çünkü $2 = 1 + 1 \in \mathbb{N}$ ve $1 = 2 - 1$ formundadır.

ii. $m \in E$ alalım. O halde $m = n - 1$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $m + 1 = (n - 1) + 1 = (n + 1) - 1$ olacağından ve $n + 1 \in \mathbb{N}$ olduğundan $(m + 1) \in E$ dir.

E kümesi Matematiksel Tümevarım Prensibinin iki şartını da sağladığından $E = \mathbb{N}$ dir.

$$3. \frac{4}{x+1} \geq 3 \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.}$$

$\frac{4}{x+1} \geq 3$ eşitsizliği sadece $x > -1$ için tanımlıdır. Çünkü $x = -1$ için kesir tanımsız olur ve $x < -1$ için kesir negatif olur. Dolayısıyla $x + 1 > 0$ olmalıdır. Eşitsizliğin her iki tarafını $x + 1$ ile çarpalım.

$$4 \geq 3(x + 1) = 3x + 3 \quad \text{Her iki taraftan 3 çıkaralım}$$

$$1 \geq 3x \quad \text{Her iki tarafı 3 ile bölelim}$$

$$\frac{1}{3} \geq x$$

bulunur. Dolayısıyla çözüm kümesi $-1 < x \leq \frac{1}{3}$, yani $\left(-1, \frac{1}{3}\right]$ yarı-açık aralıktır.

4. $|5x - 2| \geq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Mutlak değer “ $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ yada $x \leq -a$ ” özelliğinden

$$5x - 2 \geq 1 \quad \text{yada} \quad 5x - 2 \leq -1 \quad \text{dir.}$$

$$5x - 2 \geq 1 \quad \text{ise}$$

$$5x - 2 \geq 1 \quad \text{Her iki tarafa 2 ekleyelim}$$

$$5x \geq 3 \quad \text{Her iki tarafı 5 ile bölelim}$$

$$x \geq \frac{3}{5}$$

elde edilir.

$$5x - 2 \leq -1 \quad \text{ise}$$

$$5x - 2 \leq -1 \quad \text{Her iki tarafa 2 ekleyelim}$$

$$5x \leq 1 \quad \text{Her iki tarafı 5 ile bölelim}$$

$$x \leq \frac{1}{5}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $|5x - 2| \geq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$ dur.

5. $\frac{4}{5}(x - 3) < \frac{1}{7}(x - 5)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$$\frac{4}{5}(x - 3) < \frac{1}{7}(x - 5) \quad \text{Her iki tarafı 35 ile çarpalım}$$

$$28(x - 3) < 5(x - 5) \quad \text{Çarpımın toplam üzerine dağılım özelliğinden}$$

$$28x - 84 < 5x - 25 \quad \text{elde edilir. Buradan}$$

$$28x - 5x < 84 - 25$$

$$23x < 59$$

$$x < \frac{59}{23}$$

bulunur. Dolayısıyla $\frac{4}{5}(x-3) < \frac{1}{7}(x-5)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\left(-\infty, \frac{59}{23}\right)$ elde edilir.

6. $4x - \llbracket x \rrbracket = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\llbracket x \rrbracket = a \text{ ise } a \leq x < a + 1 \text{ dir.}$$

$a \leq x < a + 1$ Her iki tarafı 4 ile çarpalım

$$4a \leq 4x < 4a + 4 \text{ Her iki taraftan } \llbracket x \rrbracket \text{ çıkaralım}$$

$$4a - \llbracket x \rrbracket \leq 4x - \llbracket x \rrbracket < 4a + 4 - \llbracket x \rrbracket, \quad \llbracket x \rrbracket = a \text{ olduğundan}$$

$$4a - a \leq 4x - \llbracket x \rrbracket < 4a + 4 - a$$

$$3a \leq 4x - \llbracket x \rrbracket < 3a + 4, \quad 4x - \llbracket x \rrbracket = 5 \text{ olduğundan } 3a \leq 5 < 3a + 4$$

bulunur, yani $3a \leq 5$ ve $5 < 3a + 4$ dir. $3a \leq 5$ ise $a \leq \frac{5}{3}$ ve $5 < 3a + 4$ ise $1 < 3a$ ve buradan $\frac{1}{3} < a$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{3} < a \leq \frac{5}{3}$$

elde edilir. $a = \llbracket x \rrbracket$ bir tamsayı değeri olacağından yukarıdaki eşitsizlikten $a = 1$ dir.

$a \leq x < a + 1$ olduğundan $a = 1$ için $1 \leq x < 2$ dir. Dolayısıyla denklemin çözüm kümesi $[1, 2)$ yarı-açık aralığıdır.

7. $\llbracket 2x - 2 \rrbracket \leq 12$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Tam değer in “ $\llbracket x \rrbracket \leq a$ ise $x < a + 1$ ” özelliğinden

$\llbracket 2x - 2 \rrbracket \leq 12$ ise $2x - 2 < 13$ elde edilir, yani $2x < 15$ ve $x < \frac{15}{2}$ dir. Dolayısıyla eşitsizliğin çözüm kümesi $\left(-\infty, \frac{15}{2}\right)$ yarı-açık aralığıdır.

Bölüm Özeti

Bu bölümde reel sayılar ele alınmıştır. Reel sayılar kümesinin tanımı verilmiştir. Bu tanımda yer alan toplam, çarpım ve sıralama işlemlerinin birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Daha sonra reel sayılar kümesinin bazı özel alt kümeleri verilmiştir. Bunlardan biri olan doğal sayılar kümesi tanımlanmış ve Matematiksel Tümevarım Prensibi verilmiştir. Doğal sayıların temel özellikleri Matematiksel Tümevarım Prensibi

yardımıyla gösterilmiştir. Diğer önemli alt kümeler olan tamsayılar, rasyonel ve irrasyonel sayılarda tanımlanmış ve birbirleriyle olan ilişkiler verilmiştir.

Bu temel tanımlamalardan sonra sıralama bağıntısının bir özelliğı olarak aralık kavramı verilmiştir. Açık, kapalı, yarı-açık aralık türleri tanımlanmıştır.

Bu ünite de reel sayılar için iki temel kavram da tanımlanmıştır: Mutlak değ er ve tam değ er. Bu kavramların tanım ve özellikleri verildikten sonra, elimizdeki bir eş itlik ve eş itsizliğ in çözüm kümeleri bu kavramların özellikleri yardımıyla nasıl elde edilir konusuyla ilgilenilmiş ve çok sayıda örnek çözülmüştür.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2nd edition, Springer, 2015
2. G.B. Thomas, Calculus, 12th edition, Addison-Wesley

Ünite Soruları

Soru-1 :

$$1 + \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{8}}{\frac{5}{3} - \frac{3}{1}} = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

$$\frac{6}{7}$$

$$\frac{7}{5}$$

$$\frac{32}{25}$$

$$\frac{13}{4}$$

$$\frac{67}{75}$$

Cevap-1 :

$$\frac{67}{75}$$

Soru-2 :

$9 - 2x \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $(-\infty, 1)$

(•) - $(1, +\infty)$

(•) - $(-\infty, 2]$

(•) - $[1, +\infty)$

(•) - $(0, 1)$

Cevap-2 :

$(-\infty, 2]$

Soru-3 :

$4(x+5) > 5(x-3)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $[35, +\infty)$

(•) - $(-\infty, 35)$

(•) - $(35, +\infty)$

(•) - $(0, 35)$

(•) - $(-\infty, 35]$

Cevap-3 :

$(-\infty, 35)$

Soru-4 :

$|5x-2| \leq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $[-1/5, -3/5]$

(•) - $(1/5, 3/5)$

(•) - $(-\infty, 1/5] \cup [3/5, +\infty)$

(•) - $[1/5, 3/5]$

(•) - $(1/5, 3/5]$

Cevap-4 :

$[1/5, 3/5]$

Soru-5 :

$|7-3x|=1$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

$\left\{2, \frac{8}{3}\right\}$

$\left[2, \frac{8}{3}\right]$

$\left(2, \frac{8}{3}\right]$

$\left[-\frac{8}{3}, -2\right]$

$$\left[-\frac{8}{3}, -2\right]$$

Cevap-5 :

$$\left\{2, \frac{8}{3}\right\}$$

Soru-6 :

$4x - \lfloor x \rfloor = 5$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $[1, 2]$

(•) - $(1, 2)$

(•) - $(1, 2]$

(•) - $[1, 3)$

(•) - $[1, 2)$

Cevap-6 :

$[1, 2)$

Soru-7 :

$\lfloor 2x - 2 \rfloor \leq 12$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $(0, 15/2)$

(•) - $(-\infty, 0)$

(•) - $(-\infty, 15/2)$

(•) - $(\lfloor -\infty, 15/2 \rfloor)$

(•) - $(15/2, +\infty)$

Cevap-7 :

$(-\infty, 15/2)$

Soru-8 :

x, y, z birer pozitif tamsayı, $x \cdot y = 12$ ve $y \cdot z = 6$ olduğuna göre $x + y + z$ nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 8

(•) - 9

(•) - 10

(•) - 11

(•) - 12

Cevap-8 :

9

Soru-9 :

Aşağıdakilerden hangisi bir doğal sayıdır?

(Çoktan Seçmeli)

$$\sqrt{36}$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\sqrt{35}$$

(•) - -6

(•) - 3,12

Cevap-9 :

$$\sqrt{36}$$

4. BAĞINTI

4.1. Kartezyen Çarpım

a ve b elemanlarının, ilk elemanın a , ikinci elemanın b olacak şekilde gösterilişine a ve b nin sıralı ikilisi denir ve (a,b) ile gösterilir. Bununla birlikte,

$$(a,b) = (c,d)$$

olması için gerek ve yeter koşul $a = c$ ve $b = d$ olmasıdır. Bu sebeple, eğer $a \neq b$ ise $(a,b) \neq (b,a)$ dır.

Uyarı: (a,b) gösterilişi, $\{a,b\}$ gösterilişi ile karıştırılmamalıdır. (a,b) a ve b nin sıralı ikilisini ifade ederken, $\{a,b\}$, elemanları a ve b olan bir kümeyi ifade eder ve kümelerde elemanların sırasının önemi yoktur, yani $\{a,b\} = \{b,a\}$ dır.

A ve B herhangi iki küme olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere tüm (a,b) sıralı ikililerinin kümesine A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı denir ve $A \times B$ ile gösterilir. Dolayısıyla,

$$A \times B = \{(a,b): a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

dir.

Herhangi sonlu A ve B kümesi için $A \times B$ kartezyen çarpımının eleman sayısı

$$n(A \times B) = n(A)n(B)$$

dir.

Örnek: $A = \{2,4,6\}$ ve $B = \{x,y\}$ olsun.

$$A \times B = \{(2,x),(2,y),(4,x),(4,y),(6,x),(6,y)\}$$

dir. Görüldüğü gibi $n(A \times B) = 6 = 3 \cdot 2 = n(A)n(B)$ dir.

$$B \times A = \{(x,2),(x,4),(x,6),(y,2),(y,4),(y,6)\}$$

$$A \times A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

dir.

Bu örnekte görüldüğü gibi $A \times B \neq B \times A$ dır, yani kartezyen çarpımda sıranın önemi vardır.

4.2. Bağntı

A ve B iki küme olmak üzere $A \times B$ kartezyen çarpımının bir alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir.

R , A dan B ye bir bağıntı olsun. Dolayısıyla R , ilk elemanı A dan, ikinci elemanı B den gelen sıralı ikililerin bir kümesidir, yani her $a \in A$ ve $b \in B$ çifti için aşağıdakilerden biri mutlaka doğrudur:

1. $(a,b) \in R$; bu durumda a, b ye R -bağıntılıdır denir.
2. $(a,b) \notin R$; bu durumda a, b ye R -bağıntılı değildir denir.

Eğer R, A dan A ya giden bir bağıntı ise, yani $A^2 = A \times A$ nın bir alt kümesi ise, R ye A üzerinde bir bağıntı denir.

Bir R bağıntısına sıralı ikililerin ilk elemanlarının oluşturduğu kümeye R bağıntısının tanım kümesi, ikinci elemanlarının oluşturduğu kümeye ise R bağıntısının değer kümesi denir.

Örnekler:

1. $A = \{a,b,c\}, B = \{2,4,6\}$ olmak üzere $R = \{(a,2),(a,6),(c,2)\}$ olsun. R, A dan B ye giden bir bağıntıdır. Çünkü, $R, A \times B$ kartezyen çarpımının bir alt kümesidir. R nin tanım kümesi, yani R ye ait olan sıralı ikililerin ilk elemanlarının kümesi, $\{a,c\}$ dir. R nin değer kümesi, yani R ye ait olan sıralı ikililerin ikinci elemanlarının kümesi, $\{2,6\}$ dir.
2. Herhangi bir kümeler topluluğu üzerindeki $\subseteq$ kapsama işlemi bir bağıntıdır, yani $R = \{(A,B): A \subseteq B\}$ dir.
3. $R = \{(m,n): m \text{ böler } n\}, \mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde bir bağıntıdır. Burada m böler $n, n = mk$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ olması anlamındadır ve $m|n$ şeklinde gösterilir. Örneğin, $5|30$ ama $4 \nmid 30$ dir.
4. A herhangi bir küme olmak üzere $A \times A$ ve $\emptyset$ de $A \times A$ nın birer alt kümesi olduğundan A üzerinde birer bağıntıdırlar. $A \times A$ bağıntısına evrensel bağıntı, $\emptyset$ bağıntısına boş bağıntı denir.

4.3. Bağıntı Türleri

Yansılmalı Bağıntı: Bir A kümesi üzerindeki bir R bağıntısı

"her $a \in A$ için $(a,a) \in R$ "

koşulunu sağlıyorsa R bağıntısına yansılmalı bağıntı denir. Eğer $(a,a) \notin R$ olacak şekilde en az bir $a \in A$ var ise R bağıntısına yansılmalı olmayan bağıntı denir.

Örnek: $A = \{1,3,5,7\}$ kümesi üzerinde verilen

$$R_1 = \{(1,1),(1,3),(3,5),(1,5),(7,7)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,3),(3,3),(5,5),(7,7)\}$$

$$R_3 = \{(1,3),(3,1)\}$$

$$R_4 = \emptyset, \text{ boş bağıntı}$$

$$R_5 = A \times A, \text{ evrensel bağıntı}$$

bağıntılarının yansılmalı olup olmadıklarını inceleyelim.

A kümesi $1,3,5,7$ elemanlarından oluştuğu için bir bağıntının yansılmalı olması için tanımı gereği

$(1,1),(3,3),(5,5),(7,7)$ ikililerini içermelidir. Bu yüzden sadece R_2 ve $R_5 = A \times A$ bağıntıları yansılalıdır.

R_1 bağıntısı $(3,3)$ ve $(5,5)$ ikililerini içermediği için, R_3 ve R_4 bağıntıları $(1,1),(3,3),(5,5),(7,7)$ ikililerini içermediği için yansılmalı olmayan bağıntılardır.

Simetrik Bağntı: Bir A kümesi üzerindeki bir R bağntısı

" $a, b \in A$ olmak üzere $(a, b) \in R$ ise $(b, a) \in R$ "

koşulunu sağlıyorsa R bağntısına simetrik bağntı denir. Eğer $(a, b) \in R$ fakat $(b, a) \notin R$ olacak şekilde en az bir $a, b \in A$ var ise R bağntısına simetrik olmayan bağntı denir.

Örnek: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesi üzerinde verilen

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 5), (1, 5), (7, 7)\}$$

$R_2 = \{(1, 3), (3, 7), (3, 1), (7, 3), (7, 7)\}$ bağntılarından R_1 bağntısı simetrik olmayan bağntıdır. Çünkü, $(1, 3) \in R_1$ iken $(3, 1) \notin R_1$ dir. Benzer şekilde, $(1, 5) \in R_1$ iken $(5, 1) \notin R_1$ dir yada $(3, 5) \in R_1$ iken $(5, 3) \notin R_1$ dir. R_2 bağntısı simetriktir. Çünkü, $(3, 7) \in R_2$ iken $(7, 3) \in R_2$ ve $(3, 1) \in R_2$ iken $(1, 3) \in R_2$ dir.

Anti-simetrik Bağntı: Bir A kümesi üzerindeki bir R bağntısı

" $a, b \in A$ olmak üzere $(a, b) \in R$ ve $(b, a) \in R$ ise $a = b$ "

koşulunu sağlıyorsa R bağntısına anti-simetrik bağntı denir. Eğer $(a, b), (b, a) \in R$ olacak şekilde birbirlerinden farklı $a, b \in A$ var ise R bağntısına anti-simetrik olmayan bağntı denir.

Örnek: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesi üzerinde verilen $R = \{(1, 1), (3, 7), (3, 1), (7, 3), (7, 7)\}$ bağntısı anti-simetrik değildir. Çünkü, $(3, 7), (7, 3) \in R$ fakat $3 \neq 7$ dir.

Geçişmeli Bağntı: Bir A kümesi üzerindeki bir R bağntısı

" $a, b, c \in A$ olmak üzere $(a, b) \in R$ ve $(b, c) \in R$ ise $(a, c) \in R$ "

koşulunu sağlıyorsa R bağntısına geçişmeli bağntı denir. Eğer $(a, b), (b, c) \in R$ fakat $(a, c) \notin R$ olacak şekilde $a, b, c \in A$ var ise R bağntısına geçişmeli olmayan bağntı denir.

Örnek: $A = \{1, 3, 5, 7\}$ kümesi üzerinde verilen

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 7), (3, 1), (7, 3), (7, 7)\}$$

bağntısı geçişmeli bağntıdır. Çünkü, $(1, 3), (3, 1) \in R_1$ ve $(1, 1) \in R_1$ dir, $(7, 3), (3, 7) \in R_1$ ve $(7, 7) \in R_1$ dir. Fakat,

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 5), (7, 7)\}$$

bağntısı geçişmeli değildir. Çünkü, $(1, 3), (3, 5) \in R_2$ ama $(1, 5) \notin R_2$ dir.

4.4. Denklik Bağntısı ve Parçalanış

Boştan farklı bir A kümesi üzerinde yansımali, simetrik ve geçişmeli bir R bağıntısı varsa bu R bağıntısına, A üzerinde bir denklik bağıntısı denir. Başka bir deyişle, A kümesi üzerinde

1. Her $a \in A$ için $(a,a) \in R$
2. $a,b \in A$ olmak üzere $(a,b) \in R$ ise $(b,a) \in R$
3. $a,b,c \in A$ olmak üzere $(a,b) \in R$ ve $(b,c) \in R$ ise $(a,c) \in R$

koşulları sağlanıyorsa R ye A üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

Örnek:

1. m pozitif bir tamsayı olmak üzere iki a,b tamsayısı için $m|a-b$ ise, yani " m böler $a-b$ " ise a ve b modülo m eşleşik (kongrü) denir ve

$$a \equiv b(mod m)$$

şeklinde gösterilir. Örneğin, $m = 3$ modülüne göre

$$12 \equiv 0(mod 3) \text{ ve } 25 \equiv 1(mod 3)$$

dir. Çünkü 3 böler $12 - 0$ ve 3 böler $25 - 1$ dir.

Modülo m e göre eşleşik bağıntısı, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

2. Bir kümeler topluluğu üzerindeki $\subseteq$ kapsama bağıntısı denklik bağıntısı değildir. Çünkü bu bağıntı simetrik değildir, yani $A \subseteq B$ kapsaması her zaman $B \subseteq A$ kapsamasını göstermez.

R , boştan farklı bir A kümesi üzerinde denklik bağıntısı olsun. Her $a \in A$ ya karşılık gelen R -bağlantılı elemanların kümesine A da a nın denklik sınıfı denir ve $[a]$ ile gösterilir, yani

$$[a] = \{x: (a,x) \in R\}$$

dir. Herhangi bir $b \in [a]$ ya da $[a]$ denklik sınıfının temsilcisi denir.

A nın tüm elemanlarının bir R denklik bağıntısı altındaki denklik sınıflarının oluşturduğu topluluğa A nın R bağıntısına göre parçalanışı denir ve A/R ile gösterilir, yani

$$A/R = \{[a]: a \in A\}$$

dir.

Örnek: $A = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Çünkü yansımali, simetrik ve geçişmelidir (Kontrol ediniz.). Dolayısıyla A nın elemanlarının denklik sınıfları şu şekildedir:

$$[a] = \{a,b\}, \quad [b] = \{a,b\}, \quad [c] = \{c\}$$

Burada $[a] = [b]$ olduğu görülmektedir ve $A/R = \{[a],[c]\}$, A nın bir parçalanışıdır.

4.5. Kısmi Sıralama Bağıntısı

Boştan farklı bir A kümesi üzerinde yansımalı, anti-simetrik ve geçişmeli bir R bağıntısı varsa bu R bağıntısına, A üzerinde kısmi sıralama bağıntısı denir.

Örnek:

1. Bir kümeler topluluğu üzerindeki $\subseteq$ kapsama bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır. Çünkü, kapsamanın tanımından

– Herhangi bir A kümesi için $A \subseteq A$

– $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise $A = B$

– $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$

özelliklerinin sağlandığı açıktır.

2. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde " $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a|b$ " bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Çünkü,

– Herhangi bir $a \in \mathbb{N}$ için $a|a$ dır. Çünkü, her $a \in \mathbb{N}$ elemanı $a = a \cdot 1$ şeklinde yazılır.

– $a|b$ ve $b|a$ ise $a = b$ dir. Çünkü, $a|b$ ise $b = ak$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. $b|a$ ise $a = bt$ olacak şekilde $t \in \mathbb{N}$ vardır. $b = ak$ ve $a = bt$ eşitliklerinden $b = ak = (bt)k = b(tk)$, yani $tk = 1$ elde edilir. $t, k \in \mathbb{N}$ ve $tk = 1$ ise $t = k = 1$ dir. Buradan da $a = b$ elde edilir.

– $a|b$ ve $b|c$ ise $a|c$ dir. Çünkü, $a|b$ ise $b = ak$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. $b|c$ ise $c = bt$ olacak şekilde $t \in \mathbb{N}$ vardır. Bu iki eşitlikten $c = bt = (ak)t = a(kt)$ elde edilir. Burada $k, t \in \mathbb{N}$ ise $kt \in \mathbb{N}$ olacağından $a|c$ dir.

Fakat $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde $a|b$ bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı değildir. Çünkü, anti-simetrik özelliği sağlanmaz. Örneğin; $1|-1$, $-1|1$ fakat $-1 \neq 1$ dir.

4.6. Çözümlü Sorular

1. $A = \{p, r, s\}$ ve $B = \{2, 4, 6\}$ olmak üzere $A \times B$ kümesinin elemanlarını bulunuz. $n(A \times B) = ?$

İlk olarak, $n(A \times B) = n(A)n(B) = 3 \cdot 3 = 9$ dir. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$ olduğundan

$A \times B = \{(p, 2), (p, 4), (p, 6), (r, 2), (r, 4), (r, 6), (s, 2), (s, 4), (s, 6)\}$ bulunur.

2. $(5x, x - y) = (10, 3)$ eşitliğini sağlayan x, y sayılarını bulunuz.

İki sıralı ikilinin eşit olması için gerek ve yeter koşul birinci elemanların birbirine eşit ve ikinci elemanların birbirine eşit olmasıdır. Dolayısıyla,

$$5x = 10 \text{ ve } x - y = 3$$

olmalıdır. Burada $x = 2$ ve $y = -1$ bulunur.

3. $A = \{x, y, z, t\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere

$$R = \{(x, 1), (x, 3), (z, 2), (t, 1), (t, 3)\}$$

bağıntısının tanım ve değer kümelerini bulunuz.

R nin tanım kümesi, R ye ait sıralı ikililerin ilk elemanlarının oluşturduğu kümedir, yani $\{x, z, t\}$ dir. R nin değer kümesi ise R ye ait sıralı ikililerin ikinci elemanlarının oluşturduğu kümedir, yani $\{1, 2, 3\}$ dür.

4. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerindeki

$$R = \{(x, y) : x + 3y = 12\}$$

bağıntısının tanım ve değer kümelerini bulunuz.

Önce R nin elemanlarını bulalım. $x + 3y = 12$ eşitliğini sağlayan tüm $x, y \in \mathbb{N}$ sayı çiftleri $x = 9, y = 1$, yani $(x, y) = (9, 1) \in R$, $x = 6, y = 2$, yani $(x, y) = (6, 2) \in R$, $x = 3, y = 3$, yani $(x, y) = (3, 3) \in R$ bulunur.

Buradan

$$R = \{(9, 1), (6, 2), (3, 3)\}$$

elde edilir. Dolayısıyla R nin tanım kümesi $\{9, 6, 3\}$ ve değer kümesi $\{1, 2, 3\}$ dür.

5. x, y, z birbirlerinden farklı elemanlar olmak üzere $A = \{x, y, z\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$$R_1 = \{(x, x), (x, y), (x, z), (z, z)\}$$

$$R_2 = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y), (z, z)\}$$

$$R_3 = \{(x, x), (x, y), (y, y), (y, z)\}$$

$\emptyset$: boş bağıntı

$A \times A$: evrensel bağıntı

bağıntılarının (a) yansılmalı (b) simetrik (c) geçişmeli (d) anti-simetrik olup olmadığını inceleyiniz. Hangileri denklik bağıntısıdır?

(a) Verilen bir R bağıntısının yansılmalı olup olmadığını bulabilmek için $x, y, z \in A$ için $(x, x), (y, y), (z, z) \in R$ olması koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

R_1 bağıntısı yansılmalı değildir, çünkü $y \in A$ ama $(y, y) \notin R_1$ dir.

R_2 bağıntısı yansılalıdır. Çünkü, $x, y, z \in A$ için $(x, x), (y, y), (z, z) \in R_2$ dir.

R_3 bağıntısı yansılmalı değildir. Çünkü, $z \in A$ ama $(z, z) \notin R_3$ dür.

$\emptyset$ boş bağıntısı yansılmalı değildir. Çünkü, $x, y, z \in A$ için $(x, x), (y, y), (z, z) \notin \emptyset$ dir.

$A \times A$ evrensel bağıntısı yansımalıdır. Çünkü $x, y, z \in A$ için $(x, x), (y, y), (z, z) \in A \times A$ dir.

(b) Verilen bir R bağıntısının simetrik olup olmadığını bulabilmek için $(a, b) \in R$ ise $(b, a) \in R$ olması koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

R_1 bağıntısı simetrik değildir. Çünkü, $(x, y) \in R_1$ ama $(y, x) \notin R_1$ dir. Benzer şekilde $(x, z) \in R_1$ ama $(z, x) \notin R_1$ dir.

R_2 bağıntısı simetriktir. Çünkü, $(x, y) \in R_2$ ise $(y, x) \in R_2$ dir.

R_3 bağıntısı simetrik değildir. Çünkü, $(x, y) \in R_3$ ama $(y, x) \notin R_3$ dir. Benzer şekilde $(y, z) \in R_3$ ama $(z, y) \notin R_3$ dir.

$\emptyset$ boş bağıntısı simetriktir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

$A \times A$ evrensel bağıntısı simetriktir. Çünkü tüm sıralı ikilileri içerir.

(c) Verilen bir R bağıntısının geçişmeli olup olmadığını bulabilmek için $(a, b) \in R$ ve $(b, c) \in R$ ise $(a, c) \in R$ olması koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

R_1 bağıntısı geçişmelidir. Çünkü, $(x, x), (x, y) \in R_1$ ve $(x, y) \in R_1$ dir $(a = x, b = y, c = y)$. Benzer şekilde $(x, x), (x, z) \in R_1$ ve $(x, z) \in R_1$ dir.

R_2 bağıntısı geçişmelidir. Çünkü, $(x, x), (x, y) \in R_2$ ve $(x, y) \in R_2$ dir. Benzer şekilde, $(x, y), (y, x) \in R_2$ ve $(x, x) \in R_2$ dir. Benzer şekilde, $(x, y), (y, y) \in R_2$ ve $(x, y) \in R_2$ dir.

R_3 bağıntısı geçişmeli değildir. Çünkü, $(x, y), (y, z) \in R_3$ ama $(x, z) \notin R_3$ tür.

$\emptyset$ boş bağıntısı geçişmelidir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

$A \times A$ evrensel bağıntısı geçişmelidir. Çünkü tüm sıralı ikilileri içerir.

(d) Verilen bir R bağıntısının anti-simetrik olup olmadığını bulabilmek için $(a, b), (b, a) \in R$ ise $a = b$ olması koşulunu sağlayıp sağlamadığına bakmalıyız.

R_1 bağıntısı anti-simetriktir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

R_2 bağıntısı anti-simetrik değildir. Çünkü $(x, y), (y, x) \in R_2$ ama $x \neq y$ dir.

R_3 bağıntısı anti-simetriktir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

$\emptyset$ bağıntısı anti-simetriktir. Çünkü koşulu bozacak bir ikilisi yoktur.

$A \times A$ evrensel bağıntısı anti-simetriktir. Çünkü tüm sıralı ikilileri içerir.

R_2 bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı olduğundan denklik bağıntısıdır.

6. A sıfırdan farklı tamsayıların kümesi ve $A \times A$ üzerinde

“ $ad = bc$ olduğunda $(a, b) \approx (c, d)$ ”

şeklinde tanımlı “ $\approx$ ” bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Gösteriniz.

Bu bağıntının $A \times A$ üzerinde denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansılmalı, simetrik ve geçişmeli olduğunu gösterelim:

(a) Her $(a,b) \in A \times A$ için $(a,b) \approx (a,b)$ dir. Çünkü, her $a,b \in A$ için $ab = ba$ dır, yani “ $\approx$ ” bağıntısı yansılalıdır.

(b) $(a,b) \approx (c,d)$ ise $(c,d) \approx (a,b)$ dir. Çünkü, $(a,b) \approx (c,d)$ ise $ad = bc$ dir. Bu eşitlikten $cb = da$ elde edilir, yani $(c,d) \approx (a,b)$ dir. “ $\approx$ ” bağıntısı simetriktir.

(c) $(a,b) \approx (c,d)$ ve $(c,d) \approx (e,f)$ ise $(a,b) \approx (e,f)$ dir. Çünkü, $(a,b) \approx (c,d)$ ise $ad = bc$ dir. $(c,d) \approx (e,f)$ ise $cf = de$ dir. Bu iki eşitlikten $(ad)(cf) = (bc)(de)$ elde edilir. $c \neq 0, d \neq 0$ olduğundan son eşitliğin her iki tarafını c ve d ye bölersek $af = be$ elde edilir, yani $(a,b) \approx (e,f)$ dir. “ $\approx$ ” bağıntısı geçişmelidir.

Bu üç özellik sağlandığından “ $\approx$ ”bağıntısı $A \times A$ üzerinde denklik bağıntısıdır.

7. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde

$$R = \{(a,b): b = a^r, r \text{ pozitif bir tamsayı}\}$$

şeklinde tanımlanan R bağıntısı kısmi sıralama bağıntısıdır. Gösteriniz.

Bu bağıntının $\mathbb{Z}$ üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olduğunu göstermek için yansılmalı, anti-simetrik ve geçişmeli olduğunu gösterelim:

(a) Her $a \in \mathbb{Z}$ için $(a,a) \in R$ dir. Çünkü, $a = a^1$ dir, yani R bağıntısı yansılalıdır.

(b) $(a,b), (b,a) \in R$ ise $a = b$ dir. Çünkü, $(a,b) \in R$ ise $b = a^r$ olacak şekilde r pozitif tamsayısı vardır. $(b,a) \in R$ ise $a = b^k$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. Bu iki eşitlikten $b = a^r = (b^k)^r = b^{kr}$ elde edilir. $b = b^{kr}$ olduğundan $kr = 1$ dir. k ve r pozitif tamsayılar olduklarından $kr = 1$ eşitliği sadece $k = r = 1$ için sağlanır. Dolayısıyla $a = b$ dir, yani R bağıntısı anti-simetriktir.

(c) $(a,b) \in R$ ve $(b,c) \in R$ ise $(a,c) \in R$ dir. Çünkü, $(a,b) \in R$ ise $b = a^r$ olacak şekilde r pozitif tamsayısı vardır. $(b,c) \in R$ ise $c = b^k$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. Bu iki eşitlikten $c = b^k = (a^r)^k = a^{rk}$ elde edilir. Burada rk bir pozitif tamsayı olduğundan $(a,c) \in R$ elde edilir, yani R bağıntısı geçişmelidir.

Bu üç özellik sağlandığından R bağıntısı $\mathbb{Z}$ üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

Bölüm Özeti

Bu bölümde bağıntı kavramının tanımı verilmiş, günlük yaşantımızdan örneklerle bağıntı kavramı pekiştirilmiştir. Daha sonra yansıma, simetri, anti-simetrik, geçişme gibi bağıntı türleri tanımlanmıştır. Çok sayıda örnekle bu bağıntı türleri arasında ilişkiler gösterilmiştir. Bu bağıntı türlerinden yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlayan bir bağıntı olan denklik bağıntısı tanımlanmış, üzerinde denklik bağıntısı

tanımlı bir kümenin denklik sınıflarına ayrılması verilmiştir. Yine çok sayıda örnekle bir küme üzerinde tanımlanan denklik bağıntısı yardımıyla kümenin denklik sınıfları elde edilmiştir. Başka bir özel bağıntı türü olarak, yansıma, anti-simetrik ve geçişme özelliklerini sağlayan kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmış ve örneklerle pekiştirilmiştir.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2nd edition, Springer, 2015
2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007

Ünite Soruları

Soru-1 :

$A=\{a,b,c\}, B=\{d,e,f\}$ olmak üzere aşağıdakilerden hangisi A dan B ye bir bağıntıdır?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $(a,b),(b,e),(c,f)\}$
- (•) - $(b,d),(d,e),(c,f)\}$
- (•) - $(b,e),(c,d)\}$
- (•) - $(a,c),(b,d),(c,f)\}$
- (•) - $(a,d),(d,c),(b,e)\}$

Cevap-1 :

$(b,e),(c,d)\}$

Soru-2 :

$A=\{x,y,z,t\}, B=\{1,2,3\}$ olmak üzere $R=\{(x,1),(y,3),(z,2),(t,1),(t,2)\}$ bağıntısının tanım ve değer kümeleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $x,y,z\}, \{1,2,3\}$
- (•) - $x,y,z,t\}, \{1,2,3\}$
- (•) - $x,y,z,t\}, \{2,3\}$
- (•) - $1,2,3\}, \{x,y,z,t\}$
- (•) - $1,2,3\}, \{x,y,z\}$

Cevap-2 : $x,y,z,t\},\{1,2,3\}$ **Soru-3 :**

Z tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı $R=\{(x,y): x \cdot y \leq 1\}$ bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - Yansımali değildir.
- (•) - Simetriktir.
- (•) - Geçişmeli değildir.
- (•) - Anti-simetrik değildir.
- (•) - Denklik bağıntısı değildir.

Cevap-3 :

Geçişmeli değildir.

Soru-4 :

$A=\{b,e,h,k,l,s\}$ kümesi üzerinde $R=\{(b,b),(b,l),(e,e),(e,h),(e,s),(h,e),(h,h),(h,s),(k,k),(l,b),(l,l),(s,e),(s,h),(s,s)\}$ denklik bağıntısı verilsin. A'nın R ye göre parçalanışı $A \setminus R$ aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $\{b,l\}, \{e,h,s\}, \{k\}$
- (•) - $\{b,l\}, \{b,b\}, \{h\}$
- (•) - $\{k\}$
- (•) - $\{e,h,s\}, \{b,l\}$
- (•) - Hiçbiri

Cevap-4 :

$\{b,l\}, \{e,h,s\}, \{k\}$

Soru-5 :

R reel sayılar kümesi üzerinde $R=\{(x,y): xy>0\}$ bağıntısı tanımlanıyor. Aşağıdaki ikililerden hangisi R nin bir elemanı değildir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - (1,1)
- (•) - (-2,-5)

(•) - (5,2)

(•) - (3,7)

(•) - (3,-7)

Cevap-5 :

(3,-7)

Soru-6 :

R reel sayılar kümesi üzerinde $R=\{(x,y): x-y+\sqrt{3} \text{ rasyonel değil}\}$ bağıntısı tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - Denklik bağıntısıdır.

(•) - Simetriktir.

(•) - Geçişmelidir.

(•) - Yansımalıdır.

(•) - Kısmi sıralama bağıntısıdır.

Cevap-6 :

Yansımalıdır.

Soru-7 :

$(x-y, x+y)=(10,4)$ eşitliğini sağlayan (x,y) ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - (10,4)

(•) - (-2,-5)

(•) - (5,2)

(•) - (-3,7)

(•) - (7,-3)

Cevap-7 :

(7,-3)

Soru-8 :

N doğal sayılar kümesi üzerinde " $a,b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a|b$ " bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - Yansımali ve simetriktir.
- (•) - Yansımali ve anti-simetriktir.
- (•) - Simetrik ve geçişmelidir.
- (•) - Ne simetrik ne geçişmelidir.
- (•) - Ne yansımali ne simetriktir.

Cevap-8 :

Yansımali ve anti-simetriktir.

Soru-9 :

$A=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$ denklik bağıntısına göre $[a]=?$

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $a,b\}$
- (•) - $a,c\}$
- (•) - $b,c\}$
- (•) - $a,b,c\}$

Cevap-9 :

$a,b\}$

5. FONKSİYONLAR

5.1. Fonksiyonlar

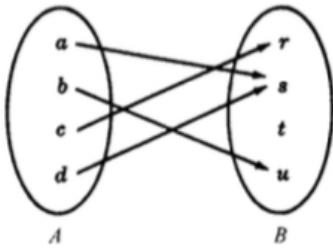
D ve Y boştan farklı iki küme olmak üzere D kümesinin her elemanına Y kümesinden tek bir eleman karşılık getiren kurala D den Y ye bir fonksiyon denir, başka bir deyişle,

“Her $x \in D$ elemanına karşılık tek bir $f(x) \in Y$ elemanı varsa”

f kuralına D den Y ye bir fonksiyon denir ve $f : D \rightarrow Y$ şeklinde gösterilir. $f(x)$ e, x elemanının f fonksiyonu altındaki görüntüsü yada değeri denir.

D ye f fonksiyonunun tanım kümesi ve tüm x elemanlarına karşılık gelen $f(x)$ değerlerinin kümesine de f fonksiyonunun görüntü yada değer kümesi denir ve $f(D)$, $Im(f)$ yada $R(f)$ ile gösterilir. Açıkta $f(D) \subseteq Y$ dir.

Örnek:



şeklinde bir f kuralı verilsin. Şekilden anlaşılmaktadır ki f kuralı altında A nın her elemanının B de bir görüntüsü vardır, yani $f(a) = r, f(b) = u, f(c) = s, f(d) = s$ dir. Ayrıca A nın her elemanının B de tek bir görüntüsü vardır. Dolayısıyla f , A dan B ye bir fonksiyondur. f nin tanım kümesi $A = \{a,b,c,d\}$ kümesidir. Görüntü kümesi ise $f(A) = \{r,s,u\}$ dir.

Uyarı: Bu örnekten de anlaşılağı üzere bir $f : D \rightarrow Y$ fonksiyonunun görüntü kümesi $f(D)$, Y kümesi olmayabilir, yani Y nin tüm elemanlarını içermek zorunda değildir. Bu örnekte $f(A) \subset B$ dir. Çünkü t hiçbir elemanın görüntüsü olmadığından $t \notin f(A)$ dir.

Bir fonksiyon matematiksel bir formül şeklinde de ifade edilebilir. Örneğin, her reel sayı, bu sayının kareköküne götüren $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon şu şekillerde ifade edilebilir:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \rightarrow \sqrt{x} \quad \text{yada} \quad y = \sqrt{x}$$

İlk gösteriliş “ $f(x) = \sqrt{x}$ ” de x e değişken denir. İkinci gösteriliş “ $x \rightarrow \sqrt{x}$ ” de “ $\rightarrow$ ” işareti “gider” anlamındadır, yani “ $x \rightarrow \sqrt{x}$ e gider” şeklinde okunur. Üçüncü gösteriliş “ $y = \sqrt{x}$ ” ise x e bağımsız değişken, y ye bağımlı değişken denir, açıktır ki y , x e değişkenine bağlıdır.

Örnekler:

1. $f(x) = x^2$ kuralını düşünelim. f , bir sayıyı karesine götürmektedir. Her reel sayının f altında bir görüntüsü olduğundan ve bu görüntülerde tek olacağından (her sayının sadece bir karesi vardır) Örneğin, 2'nin f altındaki görüntüsü, yani $f(2) = 2^2 = 4$ tür.

f nin tanım kümesi tüm reel sayıların kümesi $\mathbb{R}$ dir. f nin görüntü kümesi $f(\mathbb{R})$ ise $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ dir. Çünkü, bir reel sayının karesi negatif olamaz, yani ya sıfırdır yada pozitifdir.

2. A boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere A nın her elemanını kendisine götüren fonksiyona A üzerinde birim fonksiyon denir ve I_A şeklinde gösterilir. Başka bir deyişle, birim fonksiyon

$$\text{her } a \in A \text{ için } I_A(a) = a$$

fonksiyonudur.

3. S , boştan farklı bir A kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olsun, yani $S \subseteq A$

olsun. S den A ya giden ve S nin her elemanını kendisine götüren fonksiyona S nin A ya gömülme fonksiyonu yada gömme fonksiyonu denir ve $i : S \hookrightarrow A$ ile gösterilir, yani her $x \in S$ için $i(x) = x$ dir.

Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonunun S ye kısıtlanması $f|_S$ ile gösterilir, yani

$$\text{her } x \in S \text{ için } f|_S(x) = f(x)$$

dir.

Bir Bağlantı olarak Fonksiyon

Her $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu, $A \times B$ kümesi üzerinde “ f nin grafiği” olarak adlandırılan

$$f \text{ nin grafiği} = \{(a,b) : a \in A, b = f(a)\}$$

şeklinde bir bağlantı gösterir.

Dolayısıyla bir fonksiyona bağlantı gözüyle bakarsak fonksiyonu şu şekilde de tanımlayabiliriz:

f , A dan B ye bir bağlantı olmak üzere, yani $A \times B$ nin bir alt kümesi ise

“Her $a \in A$ elemanı için f de tek bir (a,b) sıralı ikilisi varsa”

f ye A dan B ye bir fonksiyon denir ve $f : A \rightarrow B$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \{1,4,6\}$ kümesi üzerinde

$$f = \{(1,6),(4,6),(6,1)\}$$

bağlantısı verilsin. f , A dan A ya giden bir fonksiyondur. Çünkü A nın her elemanı f deki bir ikilinin ilk girişi olarak yer alır ve her eleman sadece tek bir sıralıda vardır. Burada $f(1) = 6$, $f(4) = 6$, $f(6) = 1$ dir. Fakat,

$$g = \{(1,4),(6,1)\}$$

bağıntısı, A dan A ya giden bir fonksiyon değildir. Çünkü, g de $4 \in A$ elemanına karşılık gelen bir sıralı ikili yoktur, yani g altında $4 \in A$ elemanının bir görüntüsü yoktur. Benzer şekilde,

$$h = \{(1,6),(4,1),(1,4),(6,1)\}$$

bağıntısı da bir fonksiyon değildir. Çünkü, h de $1 \in A$ elemanına karşılık gelen sıralı ikili tek değildir, yani hem $h(1) = 6$ hem de $h(1) = 4$ dır.

$f : A \rightarrow B$ ve $g : A \rightarrow B$ iki fonksiyon olmak üzere

her $a \in A$ için $f(a) = g(a)$

ise f ve g fonksiyonlarına eşit fonksiyonlar denir ve $f = g$ ile gösterilir, yani iki fonksiyon aynı grafiğe sahipse bu fonksiyonlar eşittir.

Fonksiyonların Toplam, Çarpım, Fark ve Bölüm İşlemleri

$f : A \rightarrow B$ ve $g : A \rightarrow B$ iki fonksiyon olmak üzere her $a \in A$ için

a) İki fonksiyonun toplamı: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$

b) İki fonksiyonun farkı: $(f - g)(a) = f(a) - g(a)$

c) İki fonksiyonun çarpımı: $(fg)(a) = f(a)g(a)$

d) İki fonksiyonun bölümü: Eğer $g(a) \neq 0$ ise $\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$

e) $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere f nin c skaleri ile çarpımı $(cf)(a) = cf(a)$ dır.

5.2. Bileşke Fonksiyon

$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ şeklinde iki fonksiyon olmak üzere, yani f nin görüntü kümesi g nin tanım kümesi olmak üzere A dan C ye f ve g nin bileşkesi denilen ve $g \circ f$ şeklinde gösterilen yeni bir fonksiyon tanımlanır:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Yani a nın f altındaki görüntüsü $f(a)$ nın g altındaki görüntüsü $g(f(a))$, a nın $(g \circ f)$ bileşke fonksiyonu altındaki görüntüsüdür.

Herhangi bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için I_A ve I_B sırasıyla A ve B kümeleri üzerindeki birim fonksiyonlar olmak üzere

$$f \circ I_A = f \text{ ve } I_B \circ f = f$$

olduğu bileşke fonksiyon tanımından kolaylıkla elde edilir.

Uyarı: $g \circ f$ ve $f \circ g$ bileşke fonksiyonlarının her ikisi de tanımlı olduğunda her zaman $g \circ f = f \circ g$ eşitliği sağlanmaz. Örneğin, $f : \{x, y\} \rightarrow \{x\}$ ve $g : \{x, y\} \rightarrow \{y\}$ olsun. Açıktır ki $g \circ f : \{x, y\} \rightarrow \{y\}$ iken $f \circ g : \{x, y\} \rightarrow \{x\}$ dir.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x + 1$ olmak üzere

a) $g \circ f$

b) $f \circ f$ yi bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ in tanım kümesi ve görüntü kümesi $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ dir. $g(x) = x + 1$ in tanım kümesi ve görüntü kümesi $\mathbb{R}$ dir. Dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

şeklindedir.

b) Dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$$

şeklindedir.

5.3. Birebir, Üzerine ve Terslenebilir Fonksiyonlar

Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için A nın birbirinden farklı olan her elemanı farklı görüntülere de sahip ise f fonksiyonuna birebir fonksiyon (1-1 şeklinde de yazılır) denir. Başka bir deyişle,

$$“f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'”$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna birebir fonksiyon denir.

Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için B nin her elemanı A nın bir elemanının görüntüsü ise f fonksiyonuna üzerine bir fonksiyon denir. Başka bir deyişle, $f(A) = B$ ise f ye üzerine bir fonksiyon denir.

Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu için

$$f \circ f^{-1} = I_B \text{ ve } f^{-1} \circ f = I_A$$

olacak şekilde bir $f^{-1}:B \rightarrow A$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna terslenebilir bir fonksiyon denir, f^{-1} e f fonksiyonunun tersi denir.

Bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu birebir ve üzerine ise f fonksiyonunu terslenebilir.

Örnek: $A = \{x,y,z\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{k,l,m,n\}$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$, $f(x) = 8$, $f(y) = 2$, $f(z) = 4$ şeklinde tanımlanan fonksiyonunu düşünelim.

Her elemanın görüntüsü farklı olduğundan f birebirdir. Fakat f üzerine değildir çünkü, $f(A) = \{2,4,8\} \neq B$ dir.

$g : B \rightarrow C$ $g(2) = k$, $g(4) = m$, $g(6) = n$, $g(8) = l$ şeklinde tanımlanan fonksiyonunu düşünelim.

Her elemanın görüntüsü farklı olduğundan g birebirdir. Ayrıca, $g(B) = \{k,l,m,n\} = C$ olduğundan g üzerinedir. Dolayısıyla g terslenebilir bir fonksiyondur ve $g^{-1}:C \rightarrow B$ dir.

5.4. Bazı Temel Fonksiyonlar

Tam Kısım ve Mutlak Değer Fonksiyonu

Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için x in ondalık kısmının silinmesiyle elde edilen tamsayıya x in tam kısmı denir ve $INT(x)$ ile gösterilir.

Örnek: $INT(2,72) = 2$, $INT(\sqrt{5}) = 2$, $INT(-5,5) = -5$ $INT(3) = 3$

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

sayısına x in mutlak değeri denir (Bölüm 3 te tanımlamıştık.)

Örnek: $|2,72| = 2,72$ $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$, $|-5,5| = 5,5$ $|3| = 3$

Eksponansiyel (Üstel) Fonksiyonlar

$a > 0$ ve $a \neq 1$ reel sayısı için

$$f(x) = a^x$$

formundaki fonksiyonlara eksponansiyel fonksiyonlar denir. Tüm eksponansiyel fonksiyonların tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $(0, +\infty)$ dur. Eksponansiyel fonksiyonlar sıfır değerini almazlar.

Hatırlayalım ki m pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$a^m = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (m \text{ tane})$$

dir. Ayrıca

$$a^0 = 1 \quad \text{ve} \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

dir.

m ve n iki tamsayı olmak üzere

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

dir.

Örnek: $3^4 = 81$, $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$, $8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^2 = 4$

Logaritmik Fonksiyonlar

$a > 0$ ve $a \neq 1$ reel sayısı için

$$f(x) = \log_a x$$

formundaki fonksiyonlara logaritmik fonksiyonlar denir ve x in a tabanındaki logaritması şeklinde okunur.

Logaritmik fonksiyonlar, eksponansiyel fonksiyonların ters fonksiyonlarıdır, yani

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

dir. Logaritmik fonksiyonların tanım kümeleri $(0, +\infty)$ ve görüntü kümeleri $\mathbb{R}$ dir.

$$\log_a 1 = 0 \text{ dir. Çünkü } a^0 = 1 \text{ dir.}$$

$$\log_a a = 1 \text{ dir. Çünkü } a^1 = a \text{ dir.}$$

Örnek: $\log_2 16 = 4$ dir. Çünkü $2^4 = 16$ dir.

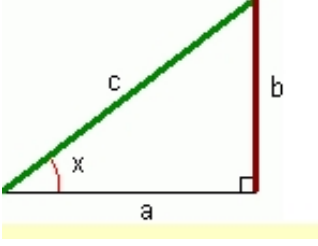
$$\log_{10} 1000 = 3 \text{ tür. Çünkü } 10^3 = 1000 \text{ dir.}$$

Üç önemli logaritma sınıfı vardır: $a=10$ tabanına göre logaritma (onluk yada standart logaritma), $a=e$ tabanına göre logaritma (doğal logaritma), $a=2$ tabanına göre logaritma (ikilik logaritma) dir. Burada $e = 2,718281\dots$ dir.

Bazı farklı kaynaklarda $\log_e x$ yerine $\ln x$ yazılır. Biz de bu derste $\ln x$ notasyonunu kullanacağız.

Temel Trigonometrik Fonksiyonlar

Genel olarak, bir açısı belirli bir dik üçgenin kenarları arasındaki oranlarla tanımlanabilen fonksiyonlar vardır. Bu derste bu fonksiyonlardan altı tanesini göreceğiz:



sinüs fonksiyonu dik üçgende karşı dik kenarın hipotenüse oranıdır.

$$f(x) = \sin x = \frac{b}{c}$$

kosinüs fonksiyonu dik üçgende komşu dik kenarın hipotenüse oranıdır.

$$f(x) = \cos x = \frac{a}{c}$$

tanjant fonksiyonu dik üçgende karşı dik kenarın komşu dik kenara oranıdır.

$$f(x) = \tan x = \frac{b}{a}$$

kotanjant fonksiyonu dik üçgende komşu dik kenarın karşı dik kenara oranıdır.

$$f(x) = \cot x = \frac{a}{b}$$

sekant fonksiyonu dik üçgende hipotenüsün komşu dik kenara oranıdır.

$$f(x) = \sec x = \frac{c}{a}$$

kosekant fonksiyonu dik üçgende hipotenüsün karşı kenara oranıdır.

$$f(x) = \csc x = \frac{c}{b}$$

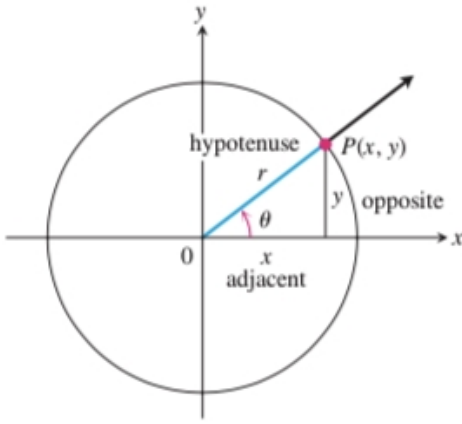
Tanımlardan da anlaşılacağı üzere

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

Trigonometrik fonksiyonların bir dik üçgenin yardımıyla tanımlanması yanında bir $x^2 + y^2 = r^2$ şeklinde $(0,0)$ merkezli r yarıçaplı bir çemberin merkezinden herhangi bir açı ile (θ diyelim) çıkan (yani x -ekseniyle θ kadar açı yapan) ve çemberi bir $P(x,y)$ noktasında kesen ışın yardımıyla da tanımlanabilir:



Şekilden de anlaşılacağı gibi

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{r}{y}$$

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının tanım kümeleri $\mathbb{R}$ ve görüntü kümeleri $[-1, 1]$ kapalı aralıktır.

Tanımlarından görüldüğü gibi tanjant ve sekant fonksiyonları $x = 0$ yani $\cos\theta = 0$ ise tanımlı değildir, yani tanjant ve sekant fonksiyonları $\theta = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \dots$ noktalarında tanımlı değildir. Dolayısıyla tanjant ve sekant fonksiyonlarının tanım kümeleri $\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, görüntü kümeleri $\mathbb{R}$ dir.

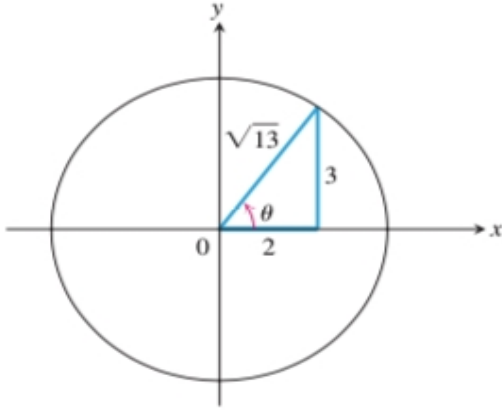
Benzer şekilde, kotanjant ve kosekant fonksiyonları $y = 0$ yani $\sin\theta = 0$ ise tanımlı değildir, yani kotanjant ve kosekant fonksiyonları $\theta = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$ noktalarında tanımlı değildir. Dolayısıyla kotanjant ve kosekant fonksiyonlarının tanım kümeleri $\mathbb{R}/\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, görüntü kümeleri $\mathbb{R}$ dir.

Aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi tanımladığımız trigonometrik fonksiyonların bazı özel değerleri vardır:

Fonksiyon	0 (0°)	$\frac{\pi}{12}$ (15°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{5\pi}{12}$ (75°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
sin	0	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	0
tan	0	$2 - \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\infty^{[1]}$
cot	$\infty^{[1]}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2 - \sqrt{3}$	0
sec	1	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	$\infty^{[1]}$
csc	$\infty^{[1]}$	$\sqrt{6} + \sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$	1

Örnek: $\tan\theta = \frac{3}{2}$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ise $\sin\theta, \cos\theta, \cot\theta, \sec\theta, \csc\theta$ değerlerini bulunuz.

Tanjant fonksiyonunun tanımından $\tan\theta = \frac{3}{2}$ ise aşağıdaki gibi karşı kenarı 3, komşu kenarı 2 birim olan bir dik üçgen oluşturabiliriz.



Buradan dik üçgenlerde Pisagor teoreminden, hipotenüs= $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ dür. Dik üçgenin tüm kenar uzunlukları bilindiğine göre tanımlarından

$$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cot\theta = \frac{2}{3}, \quad \sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}, \quad \csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

bulunur.

Periyodik Fonksiyon

Bir $f(x)$ fonksiyonuna karşılık tanım kümesindeki her x için $f(x + p) = f(x)$ olacak şekilde bir p pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon denir. Bu koşulu sağlayan en küçük p değerine ise f nin periyodu denir.

Örnek: Bir çemberin merkezinden açısı ile çıkan ışının pozisyonu, çemberin merkezinden $\theta + 2\pi$ açısı ile çıktığındaki pozisyon ile aynıdır. Bu yüzden bu iki açı aynı trigonometrik fonksiyon değerlerini gösterir, yani

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta, \quad \tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$$

$$\cot(\theta + 2\pi) = \cot\theta, \quad \sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta, \quad \csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta$$

dir. Dolayısıyla altı trigonometrik fonksiyon periyodiktir. Tanjant fonksiyonlarının periyotları π iken diğer dört trigonometrik fonksiyonunun periyodu 2π dir.

Tek ve Çift Fonksiyonlar

Bir $f(x)$ fonksiyonu tanım kümesindeki her x için

$f(-x) = f(x)$ koşulunu sağlıyorsa çift fonksiyon

$f(-x) = -f(x)$ koşulunu sağlıyorsa tek fonksiyon

denir.

Örnek:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x, \quad \sec(-x) = \sec x, \quad \csc(-x) = -\csc x$$

olduğundan kosinüs ve sekant fonksiyonları çift, diğer dört trigonometrik fonksiyon tektir.

Bazı Trigonometrik Eşitlikler

Bu eşitliklerin ispatı bu ders kapsamında verilmeyecektir. İspatlarını merak edenler bölüm sonunda verilen referans listesindeki kitaplara bakabilirler.

$$1. \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$2. 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$3. 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$4. (\text{Toplam Formülleri}) \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$5. (\text{Çift Açılı Formülleri}) \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$6. (\text{Yarım Açılı Formülleri}) \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

5.5. Toplam Sembolü ve Toplamlar

$a_1, a_2, \dots, a_n$, n tane sayıyı göstermek üzere $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ toplamı $\sum_{i=1}^n a_i$ şeklinde de gösterilir, yani

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

dir. Burada Σ , toplam sembolüdür.

Örneğin,

$$\sum_{j=m}^n a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

dir. a_i, a_j gibi notasyonlarda i yada j ye alt indis denir.

Örnekler:

$$1. \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$2. \sum_{j=2}^5 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 54$$

$$3. \sum_{i=1}^n j = 1 + 2 + \dots + n$$

Son toplam çok kullanılan bir ifadedir ve $n(n+1)/2$ ye eşittir, yani

$$\sum_{i=1}^n j = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

dir. Örneğin, 1 den 50 ye kadar olan sayıların toplamı,

$$\sum_{i=1}^{50} j = 1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50(50+1)}{2} = 1275$$

dir.

5.6. İndisli Kümeler

I boştan farklı bir küme, S ise kümelerin bir topluluğu olsun. I dan S ye giden $f: I \rightarrow S$ fonksiyonuna indisleyici fonksiyon denir ve

$$\text{Her } i \in I \text{ için } f(i) = A_i$$

şeklinde tanımlanır. Bu yüzden indisleyici fonksiyon

$$\{A_i : i \in I\} \quad \text{veya} \quad \{A_i\}_{i \in I} \quad \text{veya} \quad \{A_i\}$$

şeklinde gösterilir. I kümesine indis kümesi, I indis kümesinin elemanlarına ise indis denir. Eğer f fonksiyonu birebir ve üzerine ise, S kümeler topluluğu I tarafından indislenir denir.

Kümelerin indisli sınıfları için keşişim ve birleşim işlemleri şu şekilde tanımlanır:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \text{En az bir } i \in I \text{ için } x \in A_i\} \quad \text{ve} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \text{Her } i \in I \text{ için } x \in A_i\}$$

I sonlu bir küme olduğunda birleşim ve keşişim işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanır. Eğer I , doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ise birleşim ve keşişim işlemlerini şöyle de ifade edebiliriz:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \quad \text{ve} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

Örnek: I , tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ise her $n \in \mathbb{Z}$ elemanına $\mathbb{R}$ de bir sonsuz aralık karşılık gelir:

$$A_n = \{x : x \leq n\} = (-\infty, n]$$

5.7. Çözümlü Sorular

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun tanım ve değer kümelerini bulunuz.

f fonksiyonu bir sayıyı o sayının çarpıma göre tersine götürmektedir. Bu yüzden f , sıfırdan farklı reel sayılar için tanımlıdır, yani f nin tanım kümesi $\mathbb{R}/\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ dur. f nin değer kümesi de sıfırdan farklı tüm reel sayıların terslerinin kümesi olacağından yine sıfırdan farklı reel sayılardır, yani $f(\mathbb{R}/\{0\}) = \mathbb{R}/\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ dur.

2. $f(x) = x + 2$ ve $g(x) = x^2 - 4$ olmak üzere $(f \circ g)(1/2)$ değerini bulunuz.

g ve f nin tanım kümeleri ve görüntü kümeleri $\mathbb{R}$ dir. Dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4) = x^2 - 4 + 2 = x^2 - 2$$

şeklindedir. Buradan da

$$(f \circ g)(1/2) = (1/2)^2 - 2 = -7/4$$

bulunur.

3. $A = \{x, y, z, t\}$, $B = \{2, 4\}$ olmak üzere $f(x) = 2$, $f(y) = 4$, $f(z) = 4$, $f(t) = 2$ şeklinde tanımlanan $f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun terslenebilir olup olmadığını araştırınız.

f fonksiyonunun terslenebilir olması için birebir ve üzerine olması koşullarını incelemeliyiz.

f birebir değildir çünkü $f(y) = f(z) = 4$ ama $y \neq z$ dir yada $f(x) = f(t) = 2$ ama $x \neq t$ dir. f birebir olmadığı için terslenebilir değildir.

Alıştırma olması açısından f nin üzerine olup olmadığını inceleyelim. $f(A) = \{2, 4\} = B$ olduğundan f üzerine bir fonksiyondur.

4. $\log_{10} 0,0001 = ?$

$\log_{10} 0,0001 = -4$ tür. Çünkü, $10^{-4} = 0,0001$ dür.

5. $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2 + 1 = (-x)^2 + 1 = f(-x)$ olduğundan f çift fonksiyondur.

6. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = ?$

İlk olarak payda eşitleyelim:

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} + \frac{(1 + \cos x)^2}{\sin x(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x + (1 + \cos x)^2}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)}$$

elde edilir. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ eşitliğinden

$$\frac{\sin^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1 + 1 + 2\cos x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{2 + 2\cos x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{2(1 + \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{2}{\sin x} = 2\csc x$$

bulunur.

7. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sin \theta = \frac{2x-5}{3}$ ise x hangi aralıktadır?

Biliyoruz ki sinüs fonksiyonunun görüntü kümesi $[-1, 1]$ kapalı aralıktır, yani

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

dir. $\sin \theta = \frac{2x-5}{3}$ olduğundan

$$-1 \leq \frac{2x-5}{3} \leq 1$$

elde edilir. Buradan son eşitsizliğin her iki tarafını 3 ile çarparsak

$$-3 \leq 2x - 5 \leq 3$$

elde edilir. Şimdi her iki tarafı 5 ile toplayalım:

$$2 \leq 2x \leq 8$$

Her iki tarafı 2 ile bölersek

$$1 \leq x \leq 4$$

elde edilir, yani $x \in [1, 4]$ dır.

Bölüm Özeti

Bu bölümde fonksiyon kavramı ele alınmıştır. İki küme arasındaki her ilişkinin fonksiyon olamayacağı gösterilmiş, bir ilişkinin fonksiyon olması için hangi özellikleri sağlaması gerektiği gösterilmiştir, yani fonksiyon tanımı yapılmıştır. Daha sonra, bir fonksiyon üzerinde bazı özel şartlar konularak birebir ve üzerine fonksiyon tanımlamaları yapılmıştır. Birebir ve üzerine olan fonksiyonlara terslenebilir fonksiyon denildiği ifade edilmiş ve tersinin nasıl bulunacağı gösterilmiştir. İki fonksiyon yardımıyla ne zaman yeni bir fonksiyon üretileceği tartışılmış ve bileşke fonksiyon tanımı verilmiştir. İki fonksiyonun her zaman bileşkesinin alınamayacağına dair örnekler verilmiştir.

Tüm bu tanım ve özelliklerden sonra bazı temel fonksiyon türleri tanımlanmıştır. Bunlar mutlak değer ve tam değer fonksiyonları, üstel ve logaritmik fonksiyonlar, temel trigonometrik fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların tanım ve değer kümeleri verilmiş, önemli özellikleri gösterilmiştir. Temel trigonometrik fonksiyonlarla ilgili

kullanışlı birkaç önemli eşitlik de gösterilmiştir.

Ayrıca tek, çift ve periyodik fonksiyon tanımları da verilmiş ve trigonometrik fonksiyon örnekleriyle pekiştirilmiştir.

Bölümün sonunda, toplam ve indisli küme notasyonlar verilerek büyük verilerle çalışırken elimizdeki durumun nasıl daha sade ve net ifade edilebileceği de ele alınmıştır.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2 nd edition, Springer, 2015
2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 6th edition, 2018
3. G.B. Thomas, Calculus, 12th edition, Addison-Wesley
4. B. Musayev, M. Alp, N. Mustafayev, Analiz II, Seçkin Yayıncılık, 2007

Ünite Soruları

Soru-1 :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

fonksiyonunun değer kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $\mathbb{R}$
- (•) - $\mathbb{Q}$
- (•) - $\mathbb{R}/\{0\}$
- (•) - $(-\infty, 0)$
- (•) - $(0, +\infty)$

Cevap-1 :

$\mathbb{R}/\{0\}$

Soru-2 :

$f(x)=\sqrt{3-x}$ fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $(-\infty, 3]$

(•) - $(-\infty, 3)$

(•) - $(3, +\infty)$

(•) - $[3, +\infty)$

(•) - $(-\infty, 0)$

Cevap-2 :

$(-\infty, 3]$

Soru-3 :

$X = \{3, 6, 9, 12\}$ kümesi üzerinde verilen aşağıdaki bağıntılardan hangisi bir fonksiyondur?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $(6, 9), (3, 12), (6, 3), (9, 6), (12, 12)\}$

(•) - $(6, 3), (9, 12), (3, 12), (12, 12)\}$

(•) - $(6, 3), (9, 6), (3, 12)\}$

(•) - $(3, 12), (12, 9), (6, 9)\}$

(•) - $(3, 6), (12, 6), (6, 6), (9, 6), (3, 9)\}$

Cevap-3 :

$(6, 3), (9, 12), (3, 12), (12, 12)\}$

Soru-4 :

$f(x) = x + 2$ ve $g(x) = x^2 - 4$ olmak üzere $(f \circ g)(1/2)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $7/4$

(•) - $1/4$

(•) - $-1/4$

(•) - $-7/4$

(•) - $f \circ g$ tanımlı değildir.

Cevap-4 :

$-7/4$

Soru-5 :

$f(x) = \sqrt{x+2}$ ve $g(x) = \sqrt{x^2-4}$ fonksiyonları için $(f+g)(2)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 0

(•) - 1

(•) - 2

(•) - 3

(•) - 4

Cevap-5 :

2

Soru-6 :

$A=\{x,y,z,t\}$, $B=\{2,4\}$ olmak üzere $f(x)=2, f(y)=4, f(z)=4, f(t)=2$ şeklinde tanımlanan $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - f üzerine ve birebirdir.

(•) - f terslenebilirdir.

(•) - f ne birebir ne de üzerinedir.

(•) - f birebir ama üzerine değildir.

(•) - f birebir değil ama üzerinedir.

Cevap-6 :

f birebir değil ama üzerinedir.

Soru-7 :

$$\log_{10} 0,0001 = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - -4

(•) - 1

(•) - 2

(•) - 4

(•) - Tanımlı değildir.

Cevap-7 :

-4

Soru-8 :

Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi tek fonksiyondur?

(Çoktan Seçmeli)

$$f(x) = 2$$

$$f(x) = x^5 + x$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = x^2 + x$$

$$f(x) = x + 1$$

Cevap-8 :

$$f(x) = x^5 + x$$

Soru-9 :

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

ifadesinin en sade hali aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $f(x)=\sin x$

(•) - $f(x)=2\sin x$

(•) - $f(x)=\tan x$

(•) - $f(x)=2\csc x$

(•) - $f(x)=\cos x$

Cevap-9 :

$$f(x)=2\csc x$$

6. LİMİT

6.1. Bir Fonksiyonun Limiti

İlk olarak bir fonksiyonun limiti için kesin ve en doğru tanımı vermeden önce limitin ne olduğu hakkında fikir sahibi olmamızı sağlayacak ve sezgisel olarak limite nasıl yaklaşacağımızı anlatacak bir tanımdan başlayalım.

Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında tanımlı olması gerekmeyen ama x_0 noktasının civarında tanımlı olan f fonksiyonunu ele alalım. Burada f nin x_0 noktasının civarında tanımlı olması, ne kadar küçük seçilirse seçilsin pozitif bir ε sayısı için $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ açık aralığında tanımlı olması anlamındadır.

x_0 a yeterince yakın tüm x değerleri için $f(x)$ değerleri de aynı L sayısına yaklaşıyorsa, “ x , x_0 a yaklaşırken $f(x)$ in limiti L dir” denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

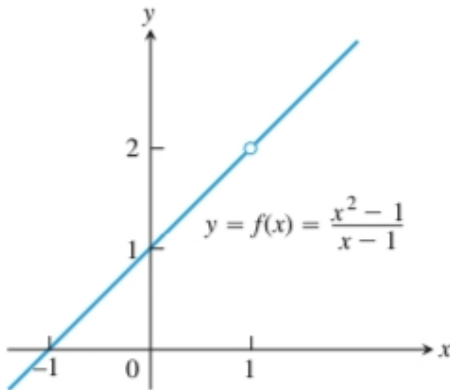
Örnekler:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında nasıl bir davranış gösterir?

f fonksiyonu $x = 1$ noktasında tanımlı değildir. $x \neq 1$ için

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

olur ve f nin grafiği, $y = x + 1$ doğrusunun $x = 1$ için $y = 2$ olacağından $(1,2)$ noktasının çıkarılmış hali olacaktır.



O halde, buradan $x = 1$ noktasında f fonksiyonu tanımlı olmadığı halde x , 1 e yaklaşırken f fonksiyonunun alacağı değerlerinin de 2 ye yaklaşacağını tahmin edebiliriz. Gerçekten de 1 noktasının civarında değerler alıp bu değerlerin f fonksiyonu altındaki görüntülerine bakalım:

$$x = 0,9 \quad \text{için} \quad f(x) = 1,9$$

$$x = 1,1 \quad \text{için} \quad f(x) = 2,1$$

$$x = 0,99 \quad \text{için} \quad f(x) = 1,99$$

$$x = 1,01 \quad \text{için} \quad f(x) = 2,01$$

$$x = 0,999 \quad \text{için} \quad f(x) = 1,999$$

$$x = 1,001 \quad \text{için} \quad f(x) = 2,001$$

olduğu görülür, yani x in 1 in civarında aldığı değerlerin görüntüleri de 2 ye yaklaşmaktadır. Dolayısıyla “ x , 1 e yaklaşırlen $f(x)$ in limiti 2 dir ve

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{yada} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

şeklinde yazılır.

Bu örnekte görüldüğü gibi bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktada tanımlı olması gerekmez. Bu örnekte f fonksiyonu $x = 1$ noktasında tanımlı değildir ama $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ dir, yani limiti vardır.

2. $f(x) = x$ birim fonksiyonunun her $x_0 \in \mathbb{R}$ için limiti x_0 dir, yani

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

dir.

3. Sabit bir $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = k$ sabit fonksiyonunun her $x_0 \in \mathbb{R}$ için limiti k dir, yani

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k$$

6.2. Limit Kuralları

L, M, c ve k reel sayılar ve

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$$

olmak üzere

1. (Toplam Kuralı) İki fonksiyonun toplamının limiti, limitlerin toplamıdır, yani

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

2. (Fark Kuralı) İki fonksiyonun farkının limiti, limitlerin farkıdır, yani

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$$

3. (Çarpım Kuralı) İki fonksiyonun çarpımının limiti, limitlerin çarpımıdır, yani

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

4. (Skalerle Çarpım Kuralı) Bir fonksiyonun bir skalerle çarpımının limiti, fonksiyonun limitinin o skalerle çarpımıdır, yani

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

5. (Bölüm Kuralı) İki fonksiyonun bölümünün limiti, eğer paydadaki fonksiyonun limiti sıfırdan farklı ise, limitlerin bölümüdür, yani

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

6. (Kuvvet Kuralı) Bir fonksiyonun rasyonel kuvvetinin limiti, eğer fonksiyonun limitinin o rasyonel kuvveti bir reel sayı ise, limitinin o rasyonel kuvvetidir, yani r ve s ortak çarpanları olmayan tamsayılar ve $s \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}, \quad L^{r/s} \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (x^4 + 2x - 5) = ?$$

Örnek:

$$\lim_{x \rightarrow c} (x^4 + 2x - 5) = \lim_{x \rightarrow c} x^4 + \lim_{x \rightarrow c} 2x - \lim_{x \rightarrow c} 5 \quad (\text{Toplam ve Fark kurallarından})$$

$$= c^4 + 2c - 5 \quad (\text{Skalerle çarpım ve çarpım kurallarından})$$

İlerleyen kısımlarda çözülecek çok sayıda limit sorusunda bu kurallardan yararlanılacağından limit kurallarıyla çok sayıda çözmüş olacağız.

Polinomların Limiti

Bir polinomun limiti yerine koyma yöntemiyle bulunur, yani

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

bir polinom olmak üzere x, c ye giderken $P(x)$ in limiti $P(c)$ dir.

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

dir.

Örnek: Yukarıdaki örneği ele alalım:

$$\lim_{x \rightarrow c} x^4 + 2x - 5 \quad \text{limiti } P(x) = x^4 + 2x - 5 \text{ polinomu için } P(c) = c^4 + 2c - 5 \text{ dir.}$$

Rasyonel Fonksiyonların Limiti

Rasyonel fonksiyonların limiti, paydadaki fonksiyonun c noktasındaki değeri sıfırdan farklı ise yerine koyma yöntemiyle bulunur, yani

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(c) \neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

dir.

Örnek: $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x^4 + 2x - 5}{2x - 5} = ?$

$Q(x) = 2x - 5$ olmak üzere $Q(1/2) = -4 \neq 0$ dır. Dolayısıyla,

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x^4 + 2x - 5}{2x - 5} = \frac{(1/2)^4 + 2(1/2) - 5}{2(1/2) - 5}$$

bulunur.

Rasyonel fonksiyonların limiti, paydadaki fonksiyonun c noktasındaki değeri sıfır ise rasyonel fonksiyonun limiti için birkaç farklı yol izlenebilir. Bu yollar rasyonel fonksiyonun, paydasının c noktasında sıfır olmayacak şekilde yeniden düzenlenmesine dayanır.

1. (Ortak çarpanı yok etmek)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = ?$$

Bu örnekte rasyonel fonksiyonun limiti bulurken kullandığımız yerine koyma yöntemini uygulayamayız, çünkü payda $x = 2$ noktasında sıfırdır. Ayrıca payın da $x = 2$ noktasında sıfır olduğunu görüyoruz. Buradan hem payda hem paydada $x - 2$ çarpanının ortak olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten de

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)}$$

dir, burada fonksiyonu $(x-2)$ ile sadeleştirdiğimizde

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)} = \frac{x-1}{x}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

2. (Ortak Çarpan yaratmak)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 81} - 9}{x^2} = ?$$

Bu örnekte de rasyonel fonksiyonun limiti bulurken kullandığımız yerine koyma yöntemini uygulayamayız, çünkü payda $x = 0$ noktasında sıfırdır. Ayrıca bir önceki örnekte olduğu gibi pay ve paydanın ortak çarpanı da yoktur. Dolayısıyla ortak bir çarpan yaratmak için hem payı hem paydayı $\sqrt{x^2 + 81} - 9$ in eşleniği olan $\sqrt{x^2 + 81} + 9$ (köklü ifadeden sonraki işareti değiştirerek elde edilir) ile çarpalım.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 81} - 9}{x^2} &= \frac{(\sqrt{x^2 + 81} - 9)(\sqrt{x^2 + 81} + 9)}{x^2(\sqrt{x^2 + 81} + 9)} \\ &= \frac{x^2 + 81 - 81}{x^2(\sqrt{x^2 + 81} + 9)} = \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 81} + 9)} \end{aligned}$$

bulunur. Son ifadede x^2 ortak çarpanıdır, yani hem payda hem paydada bulunur. Önceki örnekteki gibi bu ifadede de x^2 yi sadeleştirelim.

$$\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 81} + 9)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 81} + 9}$$

bulunur, yani $x \neq 0$ için

$$\frac{\sqrt{x^2 + 81} - 9}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 81} + 9}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 81} - 9}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 81} + 9} = \frac{1}{\sqrt{0 + 81} + 9} = \frac{1}{18}$$

elde edilir.

6.3. Sıkıştırma Teoremi

$f, g, h, x = c$ de zorunlu olmamak kaydıyla C yi içeren bir açık aralığın tüm x noktalarında $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ koşulunu sağlasın.

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

$$\text{ise } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ dir.}$$

Örnek: $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

Sinüs fonksiyonunun tanımından, her $x \in \mathbb{R}/\{0\}$ için

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

dir. Buradan

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

elde edilir. Öte yandan $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$ dır (polinom tipli fonksiyonlar). Sıkıştırma Teoremi'nden $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ bulunur.

6.4. Sağdan ve Soldan Limit

x_0 a yeterince yakın tüm x değerleri için $f(x)$ değerleri de aynı L sayısına yaklaşıyorsa, “ x, x_0 a yaklaşırken $f(x)$ in limiti L dir” denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir demiştik. Burada x değerleri x_0 dan küçük ve büyük değerler aldığında $f(x)$ değerleri de aynı L sayısına yaklaşmaktadır, yani iki taraflı limit vardır.

Bununla birlikte, bir x_0 noktasında iki taraflı limiti olmayan fakat tek taraflı limiti olan f fonksiyonları da vardır, yani “ x, x_0 a tek bir taraftan yaklaşırken $f(x)$ in limiti L dir” denir.

“ x, x_0 a sağdan yaklaşırsa (yani, $x > x_0$) limite sağdan limit, soldan yaklaşırsa (yani $x < x_0$) limite soldan limit denir. Daha açık bir şekilde ifade edecek olursak,

$x_0 < b$ olmak üzere f fonksiyonu (x_0, b) aralığı üzerinde tanımlı ve x , bu aralıktan x_0 a yaklaşırken $f(x)$ değerleri herhangi bir yönde bir L sayısına yaklaşıyorsa f, x_0 noktasında L sağdan limite sahiptir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

$x \rightarrow x_0^+$ gösterilişi, x in değerlerinin sadece x_0 dan büyük değerler olduğunu göstermektedir.

Benzer şekilde, $a < x_0$ olmak üzere f fonksiyonu (a, x_0) aralığı üzerinde tanımlı ve x bu aralıktan x_0 a yaklaşırken $f(x)$ değerleri herhangi bir yönde bir M sayısına yaklaşıyorsa, f, x_0 noktasında M soldan limite sahiptir denir ve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = M$$

şeklinde gösterilir. $x \rightarrow x_0^-$ gösterilişi, x in değerlerinin sadece x_0 dan küçük değerler olduğunu göstermektedir.

Örnek: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = ?$ ve $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = ?$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$ sağdan limiti için 0 dan büyük x değerleri ile 0 a yaklaşacağımız için

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$$

olacaktır. Bu sebeple,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

dir. Benzer şekilde, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$ soldan limiti için 0 dan küçük x değerleri ile 0 a yaklaşacağımız için

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1$$

olacaktır. Bu sebeple,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

dir.

Dikkat ediniz ki, bu örnekten de anlaşılacağı üzere her zaman $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ olmak zorunda değildir. Fakat eşit olduğu durumlar bize bir sonuç verir:

“ x, x_0 a yaklaşırken f fonksiyonunun limitinin olması ancak ve ancak f fonksiyonunun x_0 noktasında sağdan ve soldan limitlerinin var ve birbirlerine eşit olması ile mümkündür, yani

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

olmasıdır.”

Örnek: Üstteki örnekte $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$ ve $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$ sağdan ve soldan limitleri var fakat birbirlerinden farklı olduğundan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ limiti yoktur, yani $f(x) = \frac{x}{|x|}$ fonksiyonu 0 noktasında limite sahip değildir.

Örnek: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ limitini kullanarak $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = 2$ olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \text{ olduğunu gösterelim:}$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \text{ yarımlar açısı formülünden,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

elde edilir. $\theta = x/2$ dönüşümü yapalım. $x \rightarrow 0$ iken $\theta = x/2 \rightarrow 0$ dir. Buradan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-2\sin\theta}{2\theta} \sin\theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\sin\theta}{\theta} \sin\theta$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\sin\theta}{\theta} \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin\theta = - (1) \cdot (0) = 0$$

bulunur, yani

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

dır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \text{ olduğunu göstermek için } \frac{\sin 4x}{2x} \text{ fonksiyonunu } \frac{\sin\theta}{\theta} \text{ orijinal formunda yazmaya çalışalım,}$$

yani paydada $2x$ değil $4x$ değerine ihtiyacımız vardır. Paydada $4x$ değerini elde etmemiz için $\frac{\sin 4x}{2x}$ fonksiyonunda payı ve paydayı 2 ile çarpalım:

$$\frac{\sin 4x}{2x} = \frac{2\sin 4x}{2 \cdot 2x} = \frac{2\sin 4x}{4x}$$

olur. Böylece,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 4x}{4x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x}$$

limitine dönüşür. $\theta = 4x$ dönüşümü yapalım. $x \rightarrow 0$ iken $\theta = 4x \rightarrow 0$ dir. Buradan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 4x}{4x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 2 \cdot 1 = 2$$

bulunur.

Bölüm Özeti

Bu bölümde bir fonksiyonun limiti kavramı ele alınmıştır. Önce bir örnekle limit kavramına bir yaklaşım yapılmıştır ve daha sonra bu yaklaşım ışığında bir fonksiyonun limitinin tanımı verilmiştir. Fonksiyonların toplam, çarpım, fark, bölme işlemleri altında limitlerin nasıl davranışlar gösterdiği incelenmiştir. Bir polinomun limiti hesaplanmış, bundan yararlanarak bir rasyonel fonksiyonun limiti ele alınmıştır. Rasyonel

fonksiyonların limitlerinin hesaplanması için çeşitli yöntemler gösterilmiştir. Fonksiyonlar konusunda ele aldığımız bazı özel fonksiyonların limitleri ile ilgili çeşitli sorular çözülmüştür. Son olarak, sağdan ve soldan limit kavramları ele alınarak, bir fonksiyonunun limitinin var olmasının sağdan ve soldan limitlerinin varlığıyla ilişkisi verilerek çok sayıda örnekle pekiştirilmiştir.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2 nd edition, Springer, 2015
 2. G.B. Thomas, Calculus, 12th edition, Addison-Wesley
 3. B. Musayev, M. Alp, N. Mustafayev, Analiz II, Seçkin Yayıncılık, 2007
-

Ünite Soruları

Soru-1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x - 5}{2x - 5} = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 2/3

(•) - -2/3

(•) - 1

(•) - 0

(•) - -1

Cevap-1 :

2/3

Soru-2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 2x} = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 2/3

(•) - Tanımsız

(•) - 1/2

(•) - 0

(•) - 1

Cevap-2 :

1/2

Soru-3 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 2/3

(•) - 1

(•) - 1/2

(•) - -1

(•) - 2

Cevap-3 :

1

Soru-4 :

Eğer her $x \in [-1, 1]$ için $\sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2}$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 0

(•) - 2

(•) - -1

(•) - 5

(•) - $\sqrt{5}$ **Cevap-4 :** $\sqrt{5}$ **Soru-5 :**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3h+1} - 1}{h} = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - Tanımsız

(•) - 0

(•) - 1/2

(•) - 3/2

(•) - -1/2

Cevap-5 :

3/2

Soru-6 :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta} = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - Limit yoktur.

(•) - -1

(•) - 1

(•) - 0

(•) - $\sqrt{2}$

Cevap-6 :

1

Soru-7 :

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} (x+2) \frac{|x+3|}{x+3} = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - Limit yoktur.

(•) - -3

(•) - 1

(•) - -1

(•) - 3

Cevap-7 :1

Soru-8 :

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} (x+2) \frac{|x+3|}{x+3} = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - Limit yoktur.

(•) - -1

(•) - 1

(•) - 3

(•) - 0

Cevap-8 :-1

Soru-9 :

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x+2) \frac{|x+3|}{x+3} = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - Limit yoktur.

(•) - -3

(•) - 1

(•) - -1

(•) - 3

Cevap-9 :Limit yoktur.

7. TÜREV

7.1. Bir Fonksiyonun Türevi

$X \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, X üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

limiti varsa f' fonksiyonuna f fonksiyonunun x e göre türevi denir. f' fonksiyonunun tanım kümesi, f in tanım kümesinde yukarıdaki limitin var olduğu elemanlarının kümesidir. Dolayısıyla, f' fonksiyonunun tanım kümesi, ya f in tanım kümesine eşittir yada alt kümesidir. f' fonksiyonu bir x noktasında varsa f fonksiyonuna x noktasında türeve sahiptir yada diferansiyellenebilir denir. f' fonksiyonu, f nin tanım kümesindeki her nokta için varsa f e diferansiyellenebilir denir.

Eğer $z = x + h$ dönüşümü yaparsak, $h = z - x$ olur ve $h \rightarrow 0$ iken, yani h sıfıra yaklaşırken z , x e yaklaşır, yani $z \rightarrow x$ olur. Bu dönüşümle yukarıdaki türev tanımını şöyle de verebiliriz:

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

olur.

f fonksiyonunun x e göre türevi $f'(x)$ ile gösterildiği gibi

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

şeklinde de gösterilir.

Örnek:

1. $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = mx + n$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{(mz + n) - (mx + n)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{mz - mx}{z - x} \\ &= \lim_{z \rightarrow x} \frac{m(z - x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} m = m \end{aligned}$$

Dolayısıyla $f'(x) = (mx + n)' = m$ dir. Örneğin,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3}x - 5 \right) = \frac{2}{3}$$

dir.

2. $x \neq 0$ olmak üzere $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{x(x+h)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{x(x+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

dir, yani

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

3. $x \neq 2$ olmak üzere $f(x) = \frac{x}{x-2}$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-2} - \frac{x}{x-2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)(x-2) - (x+h-2)x}{h(x+h-2)(x-2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(x+h-2)(x-2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-2}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

bulunur.

7.2. Türevin Geometrik Yorumu

Geometrik olarak bir fonksiyonun bir noktadaki türevi, fonksiyonun grafiğine o noktadan geçen teğet doğrusunun eğimidir, yani

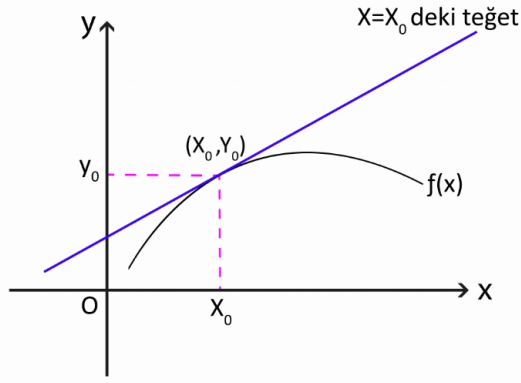
“Bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $P(x_0, f(x_0))$ noktasında teğet olan doğrunun eğimi

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{limit varsa})$$

dır.” Görüldüğü gibi $m = f'(x_0)$ dır ve teğet doğrusunun denklemi de

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

şeklindedir.



Örnek: $x > 0$ olmak üzere $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun

a) Türevini bulunuz.

b) $x = 4$ noktasında $y = \sqrt{x}$ eğrisinin teğet doğrusunu bulunuz.

a)

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x})}{(z - x)(\sqrt{z} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{z \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $x = 4$ noktasında $y = \sqrt{x}$ eğrisinin teğet doğrusunun eğimi

$$m = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

ve $(4,2)$ noktasından geçen teğet doğrusunun denklemi

$$y = f(4) + \frac{1}{4}(x - 4) = 2 + \frac{1}{4}x - 1 = \frac{1}{4}x + 1$$

dir.

7.3. Bir Aralık Üzerinde Türev

Bir (a,b) açık aralığı (sonlu yada sonsuz) üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu bu aralığın her noktasında türeve sahipse f fonksiyonuna (a,b) açık aralığı üzerinde diferansiyellenebilir denir.

Bir $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu (a,b) açık aralığının her noktasında türeve sahipse ve aralığın uç noktalarında

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{a da sağdan türev})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \quad (\text{b de soldan türev})$$

limitleri varsa f fonksiyonuna $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde diferansiyellenebilir denir.

Sağdan ve soldan limit ile limit arasındaki ilişkide olduğu gibi sağdan ve soldan türev ile türev arasında şu ilişki vardır:

“Bir fonksiyonun bir noktada türevinin olması için gerek ve yeter o koşul fonksiyonun o noktada sağdan ve soldan türevinin var ve birbirlerine eşit olmasıdır.”

Örnek: $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevi yoktur.

$x = 0$ da $f(x) = |x|$ fonksiyonunun sağdan türevi:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h}$$

$h \rightarrow 0^+$ iken $h > 0$ dır ve $|h| = h$ olduğundan

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

elde edilir, yani $x = 0$ da $f(x) = |x|$ fonksiyonunun sağdan türevi 1 dir.

$x = 0$ da $f(x) = |x|$ fonksiyonunun soldan türevi:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h}$$

$h \rightarrow 0^-$ iken $h < 0$ dır ve $|h| = -h$ olduğundan

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

elde edilir, yani $x = 0$ da $f(x) = |x|$ fonksiyonunun soldan türevi -1 dir.

Sonuç olarak, $x = 0$ da $f(x) = |x|$ fonksiyonunun sağdan ve soldan türevleri birbirlerinden farklı olduğundan $x = 0$ da $f(x) = |x|$ fonksiyonunun türevi yoktur, yani diferansiyellenebilir değildir.

7.4. Türev Alma Kuralları

Sabit Fonksiyonun Türevi: $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (c) = 0$$

dır. Diğer bir gösterilişle,

$$c' = 0$$

dır.

Örnek: $f(x) = 3$ sabit fonksiyonunun türevi $f'(x) = 0$ dır.

$f(x) = \pi$ sabit fonksiyonunun türevi $f'(x) = 0$ dır.

Kuvvet Fonksiyonlarının Türevi:

a) n pozitif bir tamsayı ise $f(x) = x^n$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$$

dır. Diğer bir gösterilişle,

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Örnek: $f(x) = x^4$ fonksiyonunun türevi $f'(x) = 4x^3$ dür.

b) n negatif bir tamsayı ve $x \neq 0$ ise $f(x) = x^n$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$$

dır. Diğer bir gösterilişle,

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Örnek: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \frac{d}{dx} (x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

c) p/q rasyonel bir sayı ise $f(x) = x^{p/q}$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (x^{p/q}) = \frac{p}{q} x^{p/q-1}$$

dır. Diğer bir gösterilişle,

$$(x^{p/q})' = \frac{p}{q} x^{p/q-1}$$

dir.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} (\sqrt{x}) = \frac{d}{dx} (x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Skalerle Çarpım Kuralı: f , diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve c bir sabit sayı ise $(cf)(x)$ fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dx} (cf)(x) = c \frac{d}{dx} f(x)$$

dir. Diğer bir gösterilişle,

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

Örnek: $f(x) = 3x^2$ fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = (3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$$

Toplamanın Türevi Kuralı: f ve g diferansiyellenebilir iki fonksiyon ise $f + g$ toplam fonksiyonu da f ve g nin ikisinin de diferansiyellenebilir olduğu noktalarda diferansiyellenebilirdir ve bu noktalarda

$$\frac{d}{dx}(f + g)(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

dir. Diğer bir deyişle,

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$c = -1$ için skalerle çarpım kuralı ve toplamın türevi kuralından, iki fonksiyonun farkının türevinin de fonksiyonların türevlerinin farkı olduğunu elde ederiz, yani

$$\frac{d}{dx}(f - g)(x) = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

dir.

Ayrıca toplamın türevi kuralı, iki fonksiyon yerine daha fazla sonlu sayıda fonksiyonun toplamına da genişletilebilir, yani $f_1, f_2, \dots, f_n$ bir x noktasında diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ toplam fonksiyonu da x noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{d}{dx}(f_1 + f_2 + \dots + f_n)(x) = \frac{d}{dx}f_1(x) + \frac{d}{dx}f_2(x) + \dots + \frac{d}{dx}f_n(x)$$

dir.

Örnek: $h(x) = 3x^2 + 7x$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$h(x)$ fonksiyonunu $f(x) = 3x^2$ ve $g(x) = 7x$ şeklinde iki fonksiyonun toplamı gibi düşünersek toplamın türevi kuralından

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}(f + g)(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(7x) = 6x + 7 \quad (\text{Kuvvet fonksiyonunun türevi ve}$$

skalerle çarpım kuralından)

Örnek: $f(x) = 2x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 7x + \frac{1}{5}$ polinomunun türevini bulunuz.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^5 - \frac{3}{4}x^4 + 7x + \frac{1}{5}\right) = \frac{d}{dx}(2x^5) - \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}x^4\right) + \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$= 2 \cdot 5x^4 - \frac{3}{4} \cdot 4x^3 + 7 + 0 = 10x^4 - 3x^3 + 7$$

bulunur.

Çarpımın Türevi Kuralı: f ve g , bir x noktasında diferansiyellenebilir iki fonksiyon ise $f \cdot g$ fonksiyonu da x noktasında diferansiyellenebilir ve

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = f(x) \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \frac{d}{dx}f(x)$$

dir. Diğer bir deyişle,

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

dir.

Örnek: $h(x) = \frac{1}{x} \left(x^3 + \frac{1}{x} \right)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$f(x) = \frac{1}{x}$ ve $g(x) = x + \frac{1}{x}$ olmak üzere $h(x) = f(x)g(x)$ olarak düşünelim ve çarpımın türevi kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= \left(\frac{1}{x} \right)' \left(x^3 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x} \left(x^3 + \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \left(x^3 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x} \left(3x^2 - \frac{1}{x^2} \right) = 2 \left(x - \frac{1}{x^3} \right) \end{aligned}$$

Bölümün Türevi Kuralı: f ve g , bir x noktasında diferansiyellenebilir iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ ise f/g fonksiyonu da x noktasında diferansiyellenebilir ve

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x) \frac{d}{dx}g(x) - g(x) \frac{d}{dx}f(x)}{g^2(x)}$$

dir. Diğer bir deyişle,

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

dir.

Örnek: $h(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 3}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$f(x) = x^3 - 1$ ve $g(x) = x + 3$ olmak üzere $h(x) = f(x)/g(x)$ olarak düşünelim ve bölümün türevi kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g} \right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{(x + 3)(x^3 - 1)' - (x^3 - 1)(x + 3)'}{(x + 3)^2} \\ &= \frac{(x + 3)3x^2 - (x^3 - 1)1}{(x + 3)^2} = \frac{3x^3 + 9x^2 - x^3 + 1}{(x + 3)^2} = \frac{2x^3 + 9x^2 + 1}{(x + 3)^2} \end{aligned}$$

Örnek:

$$h(x) = \frac{(x^3 - 1)(x^2 + 3x)}{x^5}$$

fonksiyonunun türevini bulunuz.

1.yol: İlk olarak bölümün türevi kuralını uygulayalım:

$$h'(x) = \frac{((x^3 - 1)(x^2 + 3x))' x^5 - (x^5)'(x^3 - 1)(x^2 + 3x)}{(x^5)^2}$$

Bu ifadedeki $((x^3 - 1)(x^2 + 3x))'$ türevi çarpımın türevidir. Bu türevi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} ((x^3 - 1)(x^2 + 3x))' &= (x^3 - 1)'(x^2 + 3x) + (x^3 - 1)(x^2 + 3x)' \\ &= 3x^2(x^2 + 3x) + (x^3 - 1)(2x + 3) \\ &= 5x^4 + 12x^3 - 2x - 3 \end{aligned}$$

bulunur. Bu türevi yerine koyalım:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{((x^3 - 1)(x^2 + 3x))' x^5 - (x^5)'(x^3 - 1)(x^2 + 3x)}{(x^5)^2} \\ &= \frac{(5x^4 + 12x^3 - 2x - 3)x^5 - 5x^4(x^3 - 1)(x^2 + 3x)}{x^{10}} = \frac{-3(x^3 - x - 4)}{x^5} \end{aligned}$$

bulunur.

2.yol: İlk önce

$$h(x) = \frac{(x^3 - 1)(x^2 + 3x)}{x^5}$$

fonksiyonunu sadeleştirelim:

$$h(x) = \frac{(x^3 - 1)(x^2 + 3x)}{x^5} = \frac{x^5 + 3x^4 - x^2 - 3x}{x^5} = 1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

olur. Şimdi $h'(x)$ i bulalım.

$$h'(x) = \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right)' = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \frac{12}{x^5} = \frac{-3(x^3 - x - 4)}{x^5}$$

bulunur.

7.5. Yüksek Mertebeden Türevler

Bir $y = f(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $f(x)$ in türevi $f'(x)$ de bir fonksiyondur. Eğer $f'(x)$ de diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $f'(x)$ in de türevi vardır ve $f''(x)$ şeklinde gösterilir ve $f'' = (f')'$ dır. f'' a f fonksiyonunun ikinci türevi denir, çünkü f'' , f in türevinin türevidir, yani,

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{dx} = y'$$

dir.

Örnek: $f(x) = x^3$ fonksiyonunun ikinci türevini bulunuz.

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2)' = 6x$$

Eğer f' in ikinci türevi f'' fonksiyonu da diferansiyellenebilir ise f'' nin türevi vardır ve f''' şeklinde gösterilir. f''' a f fonksiyonunun x e göre üçüncü türevi denir ve

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy''}{dx} \right) = \frac{dy'''}{dx} = y'''$$

dir. Bu şekilde devam edilirse herhangi n pozitif tamsayısı için f in x e göre n . türevi

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) = y^{(n)}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ fonksiyonunun ilk dört türevini hesaplayınız.

f in birinci türevi:

$$f'(x) = (x^3 + 4x^2 - 5)' = 3x^2 + 8x$$

f in ikinci türevi:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 + 8x)' = 6x + 8$$

f in üçüncü türevi:

$$f'''(x) = (f''(x))' = (6x + 8)' = 6$$

f in dördüncü türevi

$$f^{(4)}(x) = (f'''(x))' = 6' = 0$$

bulunur. 5. ve sonraki tüm türevler sıfırdır.

Örnek: $f(x) = \frac{1-x+4\sqrt{x}}{x}$ fonksiyonunun ikinci türevini bulunuz.

İlk önce birinci türevini bulalım:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f(x))' = \left(\frac{1-x+4\sqrt{x}}{x} \right)' = \frac{(1-x+4\sqrt{x})'x - (1-x+4\sqrt{x})x'}{x^2} \\ &= \frac{\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)x - (1-x+4\sqrt{x})}{x^2} = \frac{-x + 2\sqrt{x} - 1 + x - 4\sqrt{x}}{x^2} = \frac{-2\sqrt{x} - 1}{x^2} \end{aligned}$$

f in ikinci türevi:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{-2\sqrt{x} - 1}{x^2} \right)' = \frac{(-2\sqrt{x} - 1)'x^2 - (-2\sqrt{x} - 1)(x^2)'}{x^4}$$

$$= \frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}x^2 - (-2\sqrt{x} - 1)2x}{x^4} = \frac{3x^{3/2} + 2x}{x^4} = \frac{3x^{1/2} + 2}{x^3}$$

bulunur.

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun türevini hesaplayalım:

$$f'(x) = (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Trigonometrik fonksiyonların toplam formüllerinden

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cosh + \cos x \sinh$$

olduğunu hatırlayalım. Bu eşitliği yukarıdaki limitte yerine koyalım:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cosh + \cos x \sinh) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cosh - 1) + \cos x \sinh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cosh - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sinh}{h} \right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

bulunur, yani sinüs fonksiyonunun türevi kosinüs fonksiyonudur:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \text{yada} \quad (\sin x)' = \cos x$$

dir.

Benzer şekilde trigonometrik formüllerden yararlanarak diğer beş trigonometrik fonksiyonun türevi şöyle bulunur:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad \text{yada} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

yani kosinüs fonksiyonunun türevi sinüs fonksiyonunun negatifidir.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \quad \text{yada} \quad (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \quad \text{yada} \quad (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \quad \text{yada} \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x \quad \text{yada} \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

Örnekler: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayalım:

$$1. y = 4x + \sin x$$

$$y' = (4x + \sin x)' = (4x)' + (\sin x)' = 4 + \cos x$$

$$2. y = \sin x \tan x$$

$$y' = (\sin x \tan x)' = (\sin x)' \tan x + (\tan x)' \sin x = \cos x \tan x + \sec^2 x \sin x$$

$$= \sin x + \sec^2 x \sin x$$

$$y = \frac{\cos x}{1 - \csc x}$$

$$y' = \left(\frac{\cos x}{1 - \csc x} \right)' = \frac{(\cos x)'(1 - \csc x) - (1 - \csc x)' \cos x}{(1 - \csc x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(1 - \csc x) - (\csc x \cot x) \cos x}{(1 - \csc x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x}{1 - \csc x} - \frac{\cot^2 x}{(1 - \csc x)^2}$$

bulunur.

7.6. Bileşke Fonksiyonun Türevi ve Zincir Kuralı

Şimdiye kadar bir fonksiyonun türevinin nasıl bulunacağını öğrendik. Örneğin, $y = f(u) = \cos u$ ve $u = g(x) = x + 3$ fonksiyonlarının türevlerini almayı biliyoruz. Bununla birlikte bu iki fonksiyonun bileşkesini, yani $F(x) = f(g(x)) = \cos(x + 3)$ fonksiyonunun türevini nasıl alırız?

Bu bölümde bir $F = f \circ g$ bileşke fonksiyonunun türevinin nasıl bulunacağını göreceğiz.

Bir örnekle başlayalım:

$y = \frac{5}{3}x$ fonksiyonunu $y = \frac{1}{3}u$ ve $u = 5x$ fonksiyonlarının bileşkesi olarak düşünelim. y' türevini bu fonksiyonlara bağlı olarak nasıl buluruz?

Biliyoruz ki

$$y = \frac{5}{3}x \quad \text{ise} \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}$$

dür. Bununla birlikte elimizde

$$y = \frac{1}{3}u \quad \text{olduğundan} \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{3}$$

ve

$$u = 5x \quad \text{olduğundan} \quad \frac{du}{dx} = 5$$

türevleri de vardır. Bu türevler arasında

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ilişkisi kurulur, yani

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

bulunur.

Bu sonuç aslında bileşke fonksiyonların türevlerinin nasıl alınacağını gösteren “Zincir Kuralı” na dayanmaktadır:

Zincir Kuralı: $f(u)$, $u = g(x)$ noktasında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $g(x)$, x noktasında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ bileşke fonksiyonu da x noktasında diferansiyellenebilirdir ve türevi de

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

şeklindedir.

Leibniz’in notasyonuyla bu kuralı şöyle de ifade edebiliriz:

$$y = f(u) \text{ ve } u = g(x) \text{ ise}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

dir.

Zincir Kuralından, $f(g(x))$ bileşke fonksiyonunun x noktasındaki türevinin, f in $g(x)$ noktasındaki türeviyle g nin x noktasındaki türevinin çarpımı şeklinde olduğunu anlamaktayız.

Örnekler:

1. $y = \sin(x^3 - 2)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$f(u) = \sin u$ ve $u = g(x) = x^3 - 2$ olmak üzere $y = f(g(x))$ dir. Dolayısıyla zincir kuralından

$$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

dir.

$$f(u) = \sin u \text{ ise } f'(u) = \cos x \text{ ve } f'(g(x)) = \cos(x^3 - 2)$$

dir. Ayrıca,

$$g(x) = x^3 - 2 \text{ ise } g'(x) = 3x^2$$

bulunur. Bu değerleri y' de yerine koyarsak,

$$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^3 - 2) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3 - 2)$$

bulunur.

Zincir kuralını şu şekilde düşünmek çoğu zaman işimizi kolaylaştırır:

$$y = f(g(x)) \text{ ise}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

dir, yani, bileşke fonksiyonun türevi, dıştaki f fonksiyonunun türevinin içindeki $g(x)$ fonksiyonundaki değeri ile içindeki fonksiyonun türevinin çarpımıdır.

2. $y = \cot(4 + \sin(3x))$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

$f(u) = \cot u$ ve $u = g(x) = 4 + \sin(3x)$ olmak üzere $y = f(g(x))$ dir. Dolayısıyla zincir kuralından

$$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(u) = \cot u \text{ ise } f'(u) = -\csc^2 u \text{ ve } f'(g(x)) = -\csc^2(4 + \sin(3x))$$

bulunur.

$$g(x) = 4 + \sin(3x) \text{ ise } g'(x) = (4 + \sin(3x))' = (\sin(3x))'$$

dir. Dikkat edilecek olursa $g'(x) = (\sin(3x))'$ türevi de $\sin x$ ve $3x$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Bu türevi de hesaplamak için zincir kuralını kullanalım:

$$g'(x) = (\sin(3x))' = \cos(3x) \cdot 3 = 3\cos(3x)$$

bulunur. Bu türevleri y' türevinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} y' &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -\csc^2(4 + \sin(3x))3\cos(3x) \\ &= -3\cos(3x)\csc^2(4 + \sin(3x)) \end{aligned}$$

bulunur.

Üstel Fonksiyonun Türevi

$a > 0, a \neq 1$ olmak üzere

$$f(x) = a^x$$

üstel fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = a^x \ln a$$

dır.

Örnek: $f(x) = e^x$ fonksiyonunun türevi

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x$$

dir, yani kendisidir.

Örnek: $f(x) = e^{-4x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Zincir Kuralından yapalım:

$$(e^{-4x})' = e^{-4x}(-4x)' = -4e^{-4x}$$

bulunur.

Logaritma Fonksiyonunun Türevi

$a > 0, a \neq 1$ olmak üzere

$$f(x) = \log_a x$$

logaritmik fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

dır.

Örnek: $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun türevi

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$$

dir.

Örnek: $f(x) = \ln(4 + \sin(3x))$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Zincir Kuralından,

$$f'(x) = (\ln(4 + \sin(3x)))' = \frac{(4 + \sin(3x))'}{4 + \sin(3x)} = \frac{3\cos(3x)}{4 + \sin(3x)}$$

bulunur.

Bölüm Özeti

Bu bölümde bir fonksiyonun türevi konusu ele alınmıştır. Bir fonksiyonunun bir noktada diferansiyellenebilir olmasının tanımı verilerek çeşitli fonksiyonların bu tanımla türevleri elde edilmiştir. Daha sonra türevin geometrik olarak ne anlama geldiği incelenmiştir. Verilen bir fonksiyonun grafiğinin bir noktasından geçen teğetin denklemi türev aracılığıyla bulunmuştur. Bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon için türev tanımı sağdan ve soldan türev kavramları ile verilmiştir.

Türevin iki fonksiyonun toplam, çarpım, fark ve bölme işlemleri altında nasıl davranışlar gösterdiği incelenmiştir. Ayrıca yüksek mertebeden türev konusu ele alınmıştır. Diferansiyellenebilir bir fonksiyonunun türevinin de diferansiyellenebilir olup olmayacağı araştırılmıştır. Bir fonksiyonunun ikinci yada daha yüksek dereceden türevlerinin nasıl bulunacağı da gösterilmiş ve örnekler çözülmüştür.

Bileşke fonksiyonun türevi ve Fonksiyonlar ünitesinde gördüğümüz temel trigonometrik fonksiyonların, üstel ve logaritmik fonksiyonların türevleri de verilmiştir.

Kaynakça

1. V.A. Zorich, Mathematical Analysis I, 2 nd edition, Springer, 2015

2. G.B. Thomas, Calculus, 12th edition, Addison-Wesley

3. B. Musayev, M. Alp, N. Mustafayev, Analiz II, Seçkin Yayıncılık, 2007

Ünite Soruları

Soru-1 :

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevi hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - 0
- (•) - 1
- (•) - -1
- (•) - 2
- (•) - Türev yoktur.

Cevap-1 :

Türev yoktur.

Soru-2 :

$f(x) = (x - 2)^2 + 1$ olmak üzere $f'(-1) = ?$

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - 10
- (•) - -10
- (•) - 6
- (•) - -6
- (•) - Türev yoktur.

Cevap-2 :

-6

Soru-3 :

$f(x) = x + \frac{5}{x}$ fonksiyonunun grafiğinde $(-3, -14/3)$ noktasından geçen teğetin eğimi aşağıdakilerden

hangisidir?
(Çoktan Seçmeli)

- (•) - 4/9
- (•) - 14/3
- (•) - -3
- (•) - 1/9
- (•) - -1/9

Cevap-3 :

4/9

Soru-4 :

$f(x) = 1 + \sqrt{3-x}$ fonksiyonunun grafiğinde (2,2) noktasından geçen teğet doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $y = 3 - \frac{1}{2}x$
- (•) - $y = 4 - \frac{1}{2}x$
- (•) - c) $y=3-2x$
- (•) - d) $y=4-2x$
- (•) - e) $y=x$

Cevap-4 :

$$y = 3 - \frac{1}{2}x$$

Soru-5 :

$f(x)=u(x)v(x)$ ve $u(3)=1$, $u'(3)=-1$, $v(3)=2$, $v'(3)=-2$ ise $f'(3)=?$

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - 0
- (•) - 1
- (•) - -4
- (•) - -1
- (•) - 2

Cevap-5 :

-4

Soru-6 : $f(x) = \frac{4x-3}{2\sqrt{x}}$ olmak üzere $f'(x) = ?$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\frac{4x-3}{2\sqrt{x}}$

(•) - $\frac{8x+3}{4x\sqrt{x}}$

(•) - $\frac{4x+3}{4x\sqrt{x}}$

(•) - $\frac{3}{x\sqrt{x}}$

(•) - $\frac{3}{4x}$

Cevap-6 :

$$\frac{4x+3}{4x\sqrt{x}}$$

Soru-7 : $f(x) = \frac{4x^3}{3} - x$ fonksiyonu için $f''(x) = ?$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $8x$

(•) - $-8x$

(•) - 8

(•) - x

(•) - $-x$

Cevap-7 : $8x$ **Soru-8 :** $f(x) = \frac{4x^3}{3} - 4\cos x$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $x^3 - 4\sin x$
- (•) - $4(x^2 + \cos x)$
- (•) - $x^2 + \cos x$
- (•) - $4(x^2 + \sin x)$
- (•) - $4(x^3 + \sin x)$

Cevap-8 :

$$4(x^2 + \sin x)$$

Soru-9 :

$$y = \left(\frac{x}{3} - 1\right)^{-5} \text{ fonksiyonu için } y'(6) = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $1/3$
- (•) - 1
- (•) - $5/3$
- (•) - $-1/3$
- (•) - $-5/3$

Cevap-9 :

$$-5/3$$

8. VEKTÖRLER

8.1. $\mathbb{R}^n$ de vektörler

Bu derste vektörleri aksi belirtilmediği sürece reel sayılar üzerinde çalışacağız, yani bir vektörün girdileri aksi belirtilmediği sürece reel sayılardan oluşacaktır.

Bir örnekle başlayalım:

Bir sınıftaki 9 öğrencinin arasınaydan aldığı puanlar aşağıdaki gibi listelenmiş olsun:

20, 56, 43, 75, 62, 100, 94, 81, 10

Bu listeki değerleri farklı alt indislerle tek bir sembol kullanarak gösterebiliriz, yani

$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9$

olarak gösterebiliriz. Burada her alt indis, listedeki değerlerin sırasını gösterir. Örneğin,

w_1 : Listeki birinci elemandır, yani $w_1 = 20$ dir.

w_2 : Listedeki ikinci elemandır, yani $w_2 = 56$ dir.

Bu değerleri almış böyle bir $w = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_9)$ listesine vektör denir.

Bu örnekten sonra vektör tanımını şu şekilde verebiliriz:

Reel sayıların n -sıralılarının oluşturduğu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n tane) kartezyen çarpım kümesini

$\mathbb{R}^n$ ile gösterelim. $\mathbb{R}^n$ nin elemanlarına vektör denir, yani

$u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

n - sıralısına vektör denir. $u_i, i = 1, 2, \dots, n$ sayılarının her birine u vektörünün girdileri, koordinatları yada elemanları denir. $\mathbb{R}$ nin elemanlarına da skaler denir.

Eğer tüm girdiler sıfırsa, yani her $i = 1, 2, \dots, n$ için $u_i = 0$ ise u vektörüne sıfır vektör denir.

u ve v iki vektör olmak üzere bu vektörler aynı sayıda girdiye sahip ve birbirlerine karşılık gelen girdiler eşit ise u ve v vektörlerine eşit vektörler denir ve $u = v$ şeklinde gösterilir.

Örnekler:

1.

$(3, -8), (7, 5), (0, 0, 0), (4, 6, 8)$

vektörlerini düşünelim.

$(3, -8)$, $(7,5)$ vektörleri iki girdiden oluşur, yani $\mathbb{R}^2$ ye ait vektörlerdir. $(0,0,0)$, $(4,6,8)$ vektörleri üç girdiden oluşur, yani $\mathbb{R}^3$ e ait vektörlerdir. Ayrıca tüm girdileri sıfır olduğu için $(0,0,0)$ vektörü $\mathbb{R}^3$ te sıfır vektördür.

$$(1,4,5), (1,5,4)$$

vektörleri aynı sayıda girdiden oluşmaktadır, iki vektörün de üç girdisi vardır, yani ikisi de yani $\mathbb{R}^3$ e ait vektörlerdir. Fakat vektörlerin ikinci ve üçüncü girdileri eşit olmadığından ($4 \neq 5$) bu vektörler birbirlerine eşit değildir, yani

$$(1,4,5) \neq (1,5,4)$$

dir.

2. $(x - z, y - 1, x + z) = (1,4,5)$ olan x, y, z sayılarını bulunuz.

İki vektörün eşit ise karşılıklı girdileri eşit olmalıdır. Dolayısıyla,

$$x - z = 1, \quad y - 1 = 4, \quad x + z = 5$$

dır. Bu denklem sistemi çözüldüğünde $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$ bulunur.

Vektörlerin Sütun Gösterilişi

Şimdiye kadar $\mathbb{R}^n$ uzayındaki bir vektörü yatay olarak gösterdik, yani

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n)$$

şeklinde gösterildi. Bu şekilde gösterilen bir vektöre satır vektör denir. Benzer şekilde $\mathbb{R}^n$ deki vektörleri dikey olarak da gösterebiliriz, yani

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1.5 \\ \frac{2}{3} \\ -15 \end{bmatrix}$$

vektörleri birer sütun vektörlerdir.

8.2.Vektörlerde Toplam ve Skalerle Çarpım İşlemleri

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $\mathbb{R}^n$ de iki vektör olmak üzere

u ve v vektörünün toplamı, u ve v nin karşılıklı girdilerinin toplamı şeklinde elde edilir ve $u + v$ şeklinde gösterilir, yani

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

dir.

u vektörünün bir k reel sayısı ile çarpımı, u nun her girdisinin k sayısı ile çarpımı şeklinde elde edilir ve bu skalerle çarpım ku şeklinde gösterilir, yani

$$ku = k(u_1, u_2, \dots, u_n) = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

dur.

Dikkat edilirse u ve v nin toplamı $u + v$ ile u nun k ile skaler çarpımı ku da $\mathbb{R}^n$ de birer vektördür.

Eğer u ve v nin farklı sayıda girdisi olsaydı bu iki vektörün toplamı tanımlı olmazdı.

Toplam ve skalerle çarpım işlemlerinden yararlanarak iki vektörün farkı ve negatifini de tanımlayabiliriz:

u vektörünün negatifi:

$$-u = (-1)u = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$$

şeklindedir. u ve v nin farkı ise

$$u - v = u + (-v) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$$

şeklindedir.

$u_1, u_2, \dots, u_m$, $\mathbb{R}^n$ de m tane vektör ve $k_1, k_2, \dots, k_m$ de $\mathbb{R}$ de skalerler olmak üzere, $u_1, u_2, \dots, u_m$ vektörlerini karşılık gelen $k_1, k_2, \dots, k_m$ skalerleriyle çarpıp, elde edilen skaler çarpım vektörlerini topladığımızda oluşan

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_m u_m$$

formundaki v vektörüne $u_1, u_2, \dots, u_m$ vektörlerinin lineer kombinasyonu denir.

Örnek: a) $u = (2, 4, 6)$ ve $v = (3, -5, 8)$ olsun

$$u + v = (2 + 3, 4 + (-5), 6 + 8) = (5, -1, 14)$$

$$4u = 4(2, 4, 6) = (4 \cdot 2, 4 \cdot 4, 4 \cdot 6) = (8, 16, 24)$$

$$-v = (-1)(3, -5, 8) = (-3, 5, -8)$$

$$2u - 5v = 2(2, 4, 6) + (-5)(3, -5, 8) = (4, 8, 12) + (-15, 25, -40) = (-11, 33, -28)$$

$$\text{b) } u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$2u - 3v = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Özellikler:

$\mathbb{R}^n$ de herhangi u, v, w vektörleri ve $\mathbb{R}$ de herhangi k, k' skalerleri için

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

$$u + 0 = u \text{ (Burada } 0 = (0, 0, \dots, 0) \text{ sıfır vektördür.)}$$

$$u + (-u) = 0$$

$$u + v = v + u$$

$$k(u + v) = ku + kv$$

$$(k + k')u = ku + k'u$$

$$(kk')u = k(k'u)$$

$$1u = u$$

$\mathbb{R}^n$ de iki u, v vektörü arasında, k sıfırdan farklı bir skaler olmak üzere

$$u = kv$$

ilişkisi varsa u ya v nin katı denir.

8.3. İç Çarpım

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $\mathbb{R}^n$ de herhangi iki vektör olmak üzere

u ve v nin iç çarpımı $u \cdot v$ ile gösterilir ve

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi iki vektörün iç çarpımı, vektörlerin birbirlerine karşılık gelen girdilerinin çarpımlarının toplamıdır. İç çarpım bir reel sayıdır.

Eğer iki vektörün iç çarpımı sıfır ise bu iki vektör ortogonaldır, yani birbirlerine diktir:

$u \cdot v = 0$ ise u ve v ortogonaldır (diktir).

Örnek:

a) $u = (-2, 1, -1)$, $v = (5, 4, 3)$ ve $w = (5, 4, -6)$ vektörlerini alalım:

u ve v nin iç çarpımı:

$$u \cdot v = (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 = -9$$

u ve w nun iç çarpımı:

$$u \cdot w = (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-6) = 0$$

v ve w nun iç çarpımı:

$$v \cdot w = 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) = 23$$

dür. $u \cdot w = 0$ olduğundan u ve w ortogonaldır.

$$\text{b) } u = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$u \cdot v = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 8$$

dir.

c) $u = (-2, 1, -1, 4)$, $v = (4, k, 4, 3)$ olmak üzere u ve v nin ortogonal olduğu k değerini bulunuz.

$$u \cdot v = (-2) \cdot 4 + 1 \cdot k + (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 3 = k$$

olduğundan u ve v nin ortogonal olması için $u \cdot v = 0$ yani $k = 0$ olmalıdır.

Özellikler:

$\mathbb{R}^n$ de herhangi u, v, w vektörleri ve $\mathbb{R}$ de herhangi bir k skalerleri için

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$$

$$(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$$

$$u \cdot v = v \cdot u$$

$u \cdot u \geq 0$ dir. $u \cdot u = 0$ ancak ve ancak $u = 0$ durumunda olur.

Vektörlerin toplam, skalerle çarpım ve iç çarpım işlemleriyle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına reel Öklidyen uzay denir.

8.4. Bir Vektörün Uzunluğu (Normu)

$\mathbb{R}^n$ de herhangi bir $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ vektörünün uzunluğu, $||u||$ ile gösterilir ve

$$||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

şeklinde tanımlanır, yani bir vektörün uzunluğu, vektörün girdilerinin karelerinin toplamının karekökü şeklinde tanımlanır.

İç çarpımın 4. özelliği olan “ $u \cdot u \geq 0$ dir. $u \cdot u = 0$ ancak ve ancak $u = 0$ dir.” özelliğinden

$||u|| \geq 0$ dir ve $||u|| = 0$ ancak ve ancak $u = 0$ dir.

Eğer $||u|| = 1$, yada denk olarak, $u \cdot u = 1$ ise u ya birim vektör denir. $\mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı herhangi bir v vektörü için

$$\hat{v} = \frac{1}{||v||} v = \frac{v}{||v||}$$

şeklinde tanımlanan $\hat{v}$ vektörüne v vektörünün normalleştirilmiş vektörü denir. Açıkta ki normalleştirilmiş vektörlerin uzunluğu 1 dir, yani birim vektörlerdir.

Örnek:

$u = (1, 2, -3, 4, -5)$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_5^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{45}$$

$u = (1, -3, 4, 2)$ ve $v = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$ olmak üzere

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{30}$$

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{36}} = 1$$

bulunur. $||v|| = 1$ olduğundan v bir birim vektördür. Fakat $||u|| = \sqrt{30}$ olduğundan u birim vektör değildir. u yu normalize edelim:

$$\hat{u} = \frac{1}{||u||} u = \frac{1}{\sqrt{30}} (1, -3, 4, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği: $\mathbb{R}^n$ de herhangi u, v vektörleri için

$$|u \cdot v| \leq ||u|| ||v||$$

dir.

Üçgen Eşitsizliği: $\mathbb{R}^n$ de herhangi u, v vektörleri için

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

dir.

8.5. Uzaklık, Açı ve İzdüşüm

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $\mathbb{R}^n$ de herhangi iki vektör olmak üzere

u ve v vektörleri arasındaki uzaklık $d(u, v)$ ile gösterilir ve

$$d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

şeklinde tanımlanır.

u ve v vektörleri arasındaki açı θ is

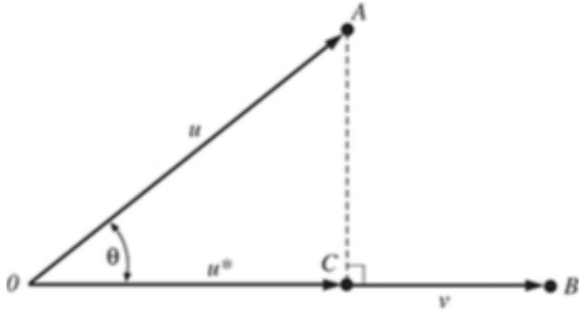
$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{||u|| ||v||}$$

şeklinde tanımlanır.

u vektörünün, v vektörü üzerine izdüşümü de bir vektördür, $proj(u,v)$ şeklinde gösterilir ve

$$proj(u,v) = \frac{u \cdot v}{||v||^2} v = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi u^* vektörü u vektörünün, v vektörü üzerine izdüşüm vektörüdür.



Örnek: $u = (1, -3, 4)$ ve $v = (2, 5, 6)$ vektörleri arasındaki uzaklığı bulalım.

$$\begin{aligned} d(u,v) &= ||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2} \\ &= \sqrt{(1 - 2)^2 + ((-3) - 5)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{1 + 64 + 4} = \sqrt{69} \end{aligned}$$

Şimdi $u = (1, -3, 4)$ ve $v = (2, 5, 6)$ vektörleri arasındaki açı θ ise $\cos\theta$ yı bulalım:

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{||u|| ||v||}$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 11$$

$$||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{65}$$

olduğundan

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{||u|| ||v||} = \frac{11}{\sqrt{26}\sqrt{65}}$$

bulunur.

Ayrıca

$$proj(u,v) = \frac{u \cdot v}{||v||^2} v = \frac{11}{65} (2, 5, 6) = \left(\frac{22}{65}, \frac{55}{65}, \frac{66}{65} \right)$$

bulunur.

8.6. Kompleks Sayılar

$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ kümesine, üzerinde tanımlanan

Eşitlik: $(a,b) = (c,d)$ ancak ve ancak $a = c$ ve $b = d$

Toplam: $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$

Çarpım: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

ile birlikte kompleks sayılar kümesi denir ve $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

Bir $a \in \mathbb{R}$ reel sayısını bir kompleks sayı formunda $(a,0)$ şeklinde gösterebiliriz. Yukarıda tanımladığımız toplam ve çarpım işlemlerini $(a,0)$ formundaki sayılara uyguladığımızda elde edeceğimiz

$$(a,0) + (b,0) = (a + b, 0) \text{ ve } (a,0) \cdot (b,0) = (ab, 0)$$

işlemleri de reel sayıların toplam ve çarpım işlemlerine karşılık gelmektedir. Bu yüzden reel sayıların kümesi $\mathbb{R}$ ye $\mathbb{C}$ kompleks sayıların kümesinin bir alt kümesi gözüyle bakabiliriz, öyle ki $(a,0)$ formundaki elemanlar a ile gösterilir, yani

$$a \leftrightarrow (a,0)$$

dır. $(0,1)$ kompleks sayısı i ile gösterilir ve şu önemli özelliğe sahiptir:

$$i^2 = ii = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = 1 \text{ veya } i = \sqrt{-1}$$

Buna bağlı olarak herhangi bir $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ şu formda yazılabilir:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + bi$$

Kompleks sayıların $z = a + bi$ formundaki notasyonunda a ya z nin reel kısmı, a ya z nin sanal kısmı denir ve sırasıyla $a = \text{Re}z$ ve $b = \text{Im}z$ şeklinde gösterilir.

$z = a + bi, w = c + di$ kompleks sayılarının toplam ve çarpımları yukarıda verdiğimiz işlemlere denk olarak şu şekilde tanımlanır:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + b) + (c + d)i$$

$$zw = (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Buradan z nin negatifini

$$-z = -1z$$

şeklinde tanımlarız. $\mathbb{C}$ üzerindeki fark işlemi ise

$$w - z = w + (-z)$$

şeklinde tanımlanır.

Kompleks Eşlenik ve Mutlak Değer (Modül)

Bir $z = a + bi \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının eşleniği $\bar{z}$ ile gösterilir ve

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

şeklinde tanımlanır.

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

dir. Buradan Z kompleks sayısının reel sayı olması ancak ve ancak $Z = \bar{Z}$ olması halinde mümkün olduğu görülmektedir.

Bir $Z = a + bi \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının mutlak değeri $|Z|$ ile gösterilir ve

$$|Z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

şeklinde tanımlanır, yani bir kompleks sayının mutlak değeri eşleniği ile kendisinin çarpımının kareköküdür. Dikkat ediniz ki $|Z|$, $\mathbb{R}^2$ de (a,b) vektörünün uzunluğudur.

Sıfırdan farklı bir $Z = a + bi \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının tersi Z^{-1} ile gösterilir ve

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

şeklindeir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde bölme işlemi ise $Z, W \in \mathbb{C}$ ve $Z \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{W}{Z} = \frac{W\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = WZ^{-1}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $Z = 3 + 2i$ ve $W = 4 - 5i$ olsun.

$$Z + W = (3 + 2i) + (4 - 5i) = (3 + 4) + (2 + (-5))i = 7 - 3i$$

$$ZW = (3 + 2i)(4 - 5i) = (3 \cdot 4 - 2 \cdot (-5)) + (2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5))i = 22 - 7i$$

$$\bar{Z} = \overline{3 + 2i} = 3 - 2i \text{ ve } \bar{W} = \overline{4 - 5i} = 4 + 5i$$

$$|Z| = \sqrt{Z\bar{Z}} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \text{ ve } |W| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{Z\bar{Z}} = \frac{3 - 2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

$$\frac{W}{Z} = WZ^{-1} = (4 - 5i)\left(\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i\right) = \frac{2}{13} - \frac{23}{13}i$$

8.7. $\mathbb{C}^n$ de vektörler

Kompleks sayıların n -sıralılarının oluşturduğu $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ (n tane) kartezyen çarpım kümesini $\mathbb{C}^n$ ile gösterelim. Reel durumdaki gibi, $\mathbb{C}^n$ nin elemanlarına vektör denir, yani

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n \in \mathbb{C} \text{ olmak üzere}$$

$$u = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]$$

n - sıralısına $\mathbb{C}^n$ de bir vektör denir. $Z_i, i = 1, 2, \dots, n$ sayılarının her birine u vektörünün girdileri, koordinatları yada elemanları denir. $\mathbb{C}$ nin elemanlarına da skaler denir.

$\mathbb{C}^n$ de vektörlerin toplam ve skalerle çarpım işlemleri, sırasıyla

$$[z_1, z_2, \dots, z_n] + [w_1, w_2, \dots, w_n] = [z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n]$$

ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z[z_1, z_2, \dots, z_n] = [zz_1, zz_2, \dots, zz_n]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $\mathbb{C}^3$ te $u = [2 + 3i, 4 - i, 3]$ ve $v = [3 - 2i, 5i, 4 - 6i]$ vektörlerini düşünelim.

$$u + v = [2 + 3i, 4 - i, 3] + [3 - 2i, 5i, 4 - 6i] = [5 + i, 4 + 4i, 7 - 6i]$$

$$(5 - 2i)u = [(5 - 2i)(2 + 3i), (5 - 2i)(4 - i), (5 - 2i)3] = [16 + 11i, 18 - 13i, 15 - 6i]$$

bulunur.

8.8. $\mathbb{C}^n$ de iç çarpım

$u = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ve $v = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $\mathbb{C}^n$ de herhangi iki vektör olmak üzere

u ve v nin iç çarpımı $u \cdot v$ ile gösterilir ve

$$u \cdot v = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \dots + z_n \overline{w_n}$$

şeklinde tanımlanır.

$u = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ vektörünün uzunluğu, $\|u\|$ ile gösterilir ve

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + \dots + z_n \overline{z_n}} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $\mathbb{C}^3$ te $u = [2 + 3i, 4 - i, 3 + 5i]$ ve $v = [3 - 4i, 5i, 4 - 2i]$ vektörlerini düşünelim

$$u \cdot v = (2 + 3i)(\overline{3 - 4i}) + (4 - i)(\overline{5i}) + (3 + 5i)(\overline{4 - 2i})$$

$$= (2 + 3i)(3 + 4i) + (4 - i)(-5i) + (3 + 5i)(4 + 2i)$$

$$= (-6 + 13i) + (-5 - 20i) + (2 + 26i) = -9 + 19i$$

$$u \cdot u = |2 + 3i|^2 + |4 - i|^2 + |3 + 5i|^2 = (4 + 9) + (16 + 1) + (9 + 25) = 64$$

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{64} = 8$$

Vektörlerin toplam, skalerle çarpım ve iç çarpım işlemleriyle birlikte $\mathbb{C}^n$ uzayına kompleks Öklidyen uzay denir. $\mathbb{R}^n$ de geçerli olan $u \cdot v = v \cdot u$ eşitliği $\mathbb{C}^n$ de şu şekilde doğrudur:

$$u \cdot v = \overline{v \cdot u}$$

Schwarz Eşitsizliği ve Üçgen Eşitsizliği ise, $\mathbb{C}^n$ için aynı şekilde de doğrudur.

8.9. Çözümlü Sorular

1. $\mathbb{R}^3$ ün $u = (2, -1, 5)$, $v = (0, -3, 3)$, $w = (0, -2, 6)$ vektörleri için $2u - 3v + 4w = ?$

$$2u - 3v + 4w = 2(2, -1, 5) + (-3)(0, 3, -3) + 4(0, -2, 6)$$

$$= (4, -2, 10) + (0, -9, 9) + (0, -8, 24) = (4, -19, 43)$$

2. $\mathbb{R}^4$ ün $u = (0, 3, -5, 0)$ ve $v = (-3, 6, -4, 2)$ vektörleri için $u \cdot v$ iç çarpımını bulunuz.

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4 = 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 6 + (-5) \cdot (-4) + 0 \cdot 2 = 38$$

3. $\mathbb{R}^3$ ün $u = (4, -12, -3)$ vektörünün uzunluğunu hesaplayınız.

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + (-3)^2} = \sqrt{169} = 13$$

4. $\mathbb{R}^4$ ün $v = (2, -4, 6, 3)$ vektörünü normalleştiriniz.

Bir v vektörünün normali

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{v}{\|v\|}$$

formundadır. Bu yüzden önce $\|v\|$ yi bulalım:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{65}$$

dir. Şimdi v yi normalleştirebiliriz:

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v = \frac{1}{\sqrt{65}} (2, -4, 6, 3) = \left(\frac{2}{\sqrt{65}}, -\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{6}{\sqrt{65}}, \frac{3}{\sqrt{65}} \right)$$

bulunur.

5. $\mathbb{R}^3$ ün $u = (2, -6, 0)$ ve $v = (3, 5, 7)$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere $\cos \theta$ yi bulunuz.

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

dir.

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 2 \cdot 3 + (-6) \cdot 5 + 0 \cdot 7 = -36$$

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{40}$$

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{3^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{83}$$

olduğundan

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{-36}{\sqrt{40} \sqrt{83}}$$

6. $z = 5 + 2i$, $w = 4 - i \in \mathbb{C}$ için zw değerini hesaplayınız.

$$zw = (5 + 2i)(4 - i) = 5.4 + 5.(-i) + (2i).4 + (2i).(-i)$$

$$= 20 - 5i + 8i + 2 = 22 + 3i$$

7. $z = 5 + 2i$ kompleks sayısının $|z|$ mutlak değerini bulunuz.

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(5 + 2i)(5 + 2i)} =$$

$$\sqrt{(5 + 2i)(5 - 2i)} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

8. $\mathbb{C}^3$ te $u = [2 + 3i, 4 - i, 3 + 5i]$ ve $v = [3 - 4i, 5i, 4 - 2i]$ vektörleri için $u \cdot v$

iç çarpımını bulunuz.

$$u \cdot v = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n$$

$$= (2 + 3i)(\overline{3 - 4i}) + (4 - i)(\overline{5i}) + (3 + 5i)(\overline{4 - 2i})$$

$$= (2 + 3i)(3 + 4i) + (4 - i)(-5i) + (3 + 5i)(4 + 2i)$$

$$= (-6 + 13i) + (-5 - 20i) + (2 + 26i) = -9 + 19i$$

9. $\mathbb{C}^2$ de $u = [1 + 7i, 2 - 6i]$ vektörü için $(3 + i)u$ değerini hesaplayınız.

$$(3 + i)u = (3 + i)[1 + 7i, 2 - 6i] = [(3 + i)(1 + 7i), (3 + i)(2 - 6i)]$$

$$= [(3 + i)(1 + 7i), (3 + i)(2 - 6i)] = [-4 + 21i, 12 - 16i]$$

10. $\frac{2 - 5i}{5 + 2i}$ sayısını $a + bi$ formunda yazınız.

$$\frac{2 - 5i}{5 + 2i} = \frac{(2 - 5i)(5 - 2i)}{(5 + 2i)(5 - 2i)} = \frac{-29i}{29} = -i$$

Bölüm Özeti

Bu bölümde vektörler konusu ele alınmıştır. Vektörler üzerinde toplam, skalerle çarpım işlemleri tanımlanmış ve bu işlemlerin özellikleri verilmiştir. Daha sonra vektörler üzerinde tanımlanan iç çarpım işlemi ele alınmıştır. İç çarpım işleminin özellikleri ve bu işlem yardımıyla tanımlanan bir vektörün uzunluğu, iki vektör arası uzaklık, iki vektör arası açı gibi özelliklerin nasıl bulunacağı verilmiştir. Uzunluğu 1 olmayan vektörlerin nasıl normalleştirileceği elde edilmiştir.

Bu özelliklerin tamamı reel vektörler için verildiğinden bölümün sonunda kompleks vektörler konusuna girilmiştir. İlk önce kompleks sayılar ve kompleks sayıların eşleniği ve mutlak değeri kavramları verilmiştir. Bu kavramlar öğrenildikten sonra kompleks vektörler üzerinde iç çarpım işlemi tanımlanmıştır. Bölüm sonunda tüm üniteyle ilgili karışık sorular çözülmüştür.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Linear Algebra, 6th edition, 2018

2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007

Ünite Soruları

Soru-1 :

$\mathbb{R}^3$ ün $u = (2, -1, 5), v = (0, 3, -3), w = (0, -2, 6)$ vektörleri için $2u - 3v + 4w = ?$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - (3,9,3)

(•) - (4,-19,43)

(•) - (4,19,-43)

(•) - (-1,4,3)

(•) - (4,-3,5)

Cevap-1 :

(4,-19,43)

Soru-2 :

$\mathbb{R}^4$ ün $u = (0, 3, -5, 0)$ ve $v = (-3, 6, -4, 2)$ vektörleri için $u \cdot v$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 38

(•) - 12

(•) - 0

(•) - -12

(•) - -38

Cevap-2 :

38

Soru-3 :

$\mathbb{R}^3$ ün $u = (4, -12, -3)$ vektörünün uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 4

(•) - 19

(•) - 13

(•) - 0

(•) - 12

Cevap-3 :

13

Soru-4 :

$\mathbb{R}^4$ ün $v = (2, -4, 6, 3)$ vektörünün normalleştirilmiş vektörü aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $(2, -4, 6, 3)$

(•) - $\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{4}{\sqrt{14}}, \frac{6}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

(•) - $\left(2, -\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{6}{\sqrt{65}}, 3\right)$

(•) - $\left(\frac{1}{\sqrt{65}}, -\frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{1}{\sqrt{65}}\right)$

(•) - $\left(\frac{2}{\sqrt{65}}, -\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{6}{\sqrt{65}}, \frac{3}{\sqrt{65}}\right)$

Cevap-4 :

$\left(\frac{2}{\sqrt{65}}, -\frac{4}{\sqrt{65}}, \frac{6}{\sqrt{65}}, \frac{3}{\sqrt{65}}\right)$

Soru-5 :

$\mathbb{R}^3$ ün $u = (2, -6, 0)$ ve $v = (3, 5, 7)$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere $\cos\theta$ aşağıdakilerden hangisidir?
qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\frac{40}{6\sqrt{83}}$

(•) - $\frac{83}{6\sqrt{40}}$

(•) - 1

$\frac{-24}{\sqrt{40}} \cdot \sqrt{83}$

(•) - $\frac{18}{40\sqrt{5}}$

Cevap-5 :

$$\frac{-24}{\sqrt{40}} \cdot \sqrt{83}$$

Soru-6 :

$z=5+2i$, $w=4-i \in \mathbb{C}$ olmak üzere zw değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $22+3i$

(•) - $20-2i$

(•) - $22-3i$

(•) - $20+2i$

(•) - 0

Cevap-6 :

$22+3i$

Soru-7 :

$z=5+2i$ kompleks sayısının $|z|$ mutlak değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 3

(•) - 2

$$\sqrt{29}$$

(•) - 7

(•) - 23

Cevap-7 :

$$\sqrt{29}$$

Soru-8 :

$\mathbb{C}^3$ te $u = [2 + 3i, 4 - i, 3 + 5i]$ ve $v = [3 - 4i, 5i, 4 - 2i]$ vektörlerinin $u \cdot v$ iç çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $-9+23i$

(•) - $-9-19i$

(•) - $9+19i$

(•) - $9-19i$

(•) - Tanımlı değildir.

Cevap-8 :

$-9+23i$

Soru-9 :

$\mathbb{C}^2$ de $u = [1 + 7i, 2 - 6i]$ vektörü için $(3+i)u$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $[4+2i, 1-6i]$

(•) - $[-4+22i, 12-16i]$

(•) - $[21+4i, 16-12i]$

(•) - $[-4, 6i]$

(•) - $[21i, 12-16i]$

Cevap-9 :

$[-4+22i, 12-16i]$

9. MATRİSLER

9.1. Matrisler

Dikdörtgen bir dizi oluşturacak şekilde düzenlenmiş

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

formundaki bir nesneler kümesine matris denir.

Bu derste matris içine konulan nesneleri sadece reel sayılar yada kompleks sayılar olarak düşüneceğiz.

Yukarıdaki gibi dizilmiş bir A matrisinin yatay olarak aynı hizada yer alan sayıların oluşturduğu

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

m tane vektörüne A matrisinin satırları yada satır vektörleri, dikey olarak aynı hizada yer alan sayıların oluşturduğu

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

n tane vektörüne A matrisinin sütunları yada sütun vektörleri denir. A matrisin a_{ij} elemanlarına matrisin i . girişi yada girdisi denir. Burada a_{ij} girdisindeki i , girdinin hangi satırda bulunduğunu, j ise hangi sütunda bulunduğunu gösterir. Örneğin, a_{21} girdisi matrisin 2. satır 1. sütununda bulunur. A matrisi, basit kullanım açısından $A = [a_{ij}]$ formunda da gösterilir.

Bir matrisin tüm girdileri reel sayılardan oluşuyorsa o matrise reel matris, tüm girdileri kompleks sayılardan oluşuyorsa o matrise kompleks matris denir.

Bir matris m satır ve n sütundan oluşuyorsa o matrise “m çarpı n” lik matris denir $m \times n$ şeklinde yazılır.

Matrisin satır ve sütun sayılarının çarpımı mn e matrisin boyutu denir.

A ve B iki matris olmak üzere bu matrislerin satır ve sütun sayıları eşit ve bu satır ve sütunlarda birbirlerine karşılık gelen girdileri eşit ise bu iki matrise eşit matrisler denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir.

Bir matris sadece bir satırdan oluşuyorsa o matrise satır matris denir. Bir matris sadece bir sütundan oluşuyorsa o matrise sütun matris denir.

Eğer bir matrisin tüm girdileri sıfırsa o matrise sıfır matris denir ve 0 ile gösterilir.

Örnek:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 6 & 1/2 \end{bmatrix}$ matrisinin 2 satır, 3 sütunu vardır, yani $m = 2, n = 3$ olduğundan A matrisi 2×3 bir matristir. A matrisinin satırları,

$$(2, -3, 5) \text{ ve } (1, 6, 1/2)$$

dır. Sütunları ise

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

dir. A matrisinin tüm girdileri 2,-3,5, 1,6,1/2 reel sayılardan olduğundan A matrisi bir reel matristir.

2. $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi 2×4 sıfır matristir. Çünkü tüm girdileri sıfırdır.

3. $\begin{bmatrix} x-y & 2z-t \\ x+y & z-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ise x, y, z, t sayılarını bulunuz.

İki matrisin eşitliğinden birbirlerine karşılık gelen girdiler eşit olmalıdır, yani

$$x - y = 1, \quad x + y = 3, \quad 2z - t = 4, \quad z - t = -2$$

olmalıdır. Buradan $x = 2, y = 1, z = 6, t = 8$ bulunur.

9.2. Matrislerde Toplam ve Skalerle Çarpım İşlemleri

$A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$, satır ve sütun sayısı aynı olan iki matris olsun, $m \times n$ diyelim.

A ve B matrislerinin toplamı, birbirlerine karşılık gelen girdilerinin toplamı ile oluşan bir matristir ve $A + B$ ile gösterilir, yani

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

dir. Görüldüğü gibi $A + B$ toplam matrisi de $m \times n$ matristir. Farklı boyutlardaki matrislerin toplamı tanımlı değildir.

$A = [a_{ij}]$ matrisinin bir k skaleri ile çarpımı, matrisin tüm girdilerinin k ile çarpımından oluşan matristir ve kA ile gösterilir, yani

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

dir. Görüldüğü gibi kA skalerle çarpım matrisi de $m \times n$ matristir.

Matrislerin toplam ve skalerle çarpım işlemlerinden yararlanarak, bir matrisin negatifi ve iki matrisin fark işlemlerini de tanımlayabiliriz: Bir A matrisinin negatifi,

$$-A = (-1)A$$

şeklinde tanımlanır. İki A ve B matrisinin farkı ise

$$A - B = A + (-B)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 6 & 1/2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 6 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + (-2) & (-3) + 4 & 5 + 3 \\ 1 + 1 & 6 + 3 & 1/2 + 2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 2 & 9 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 6 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2(-3) & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 6 & 2 \cdot (1/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 10 \\ 2 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = 3 \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 6 & 1/2 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -17 & 9 \\ 1 & 12 & -5/2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Özellikler: A, B, C herhangi üç $m \times n$ matris, k, k' herhangi iki skaler olmak üzere

$$1. (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$2. A + 0 = 0 + A = A$$

$$3. A + (-A) = (-A) + A = 0$$

$$4. A + B = B + A$$

$$5. k(A + B) = kA + kB$$

$$6. (k + k')A = kA + k'A$$

$$7. (kk')A = k(k'A)$$

$$8. 1A = A$$

eşitlikleri doğrudur. 2. ve 3. eşitlikteki 0 , sıfır matrisi göstermektedir. 1. eşitlikten herhangi n tane matrisin toplamı

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

matrisi için paranteze gerek olmadığını ve 4. eşitlikten de toplamın sırasının önemli olmadığını anlıyoruz. 6. ve 8. eşitliklerden ise

$$A + A = 2A, \quad A + A + A = 3A, \quad \dots$$

olduğunu anlıyoruz.

9.3. Matrislerin Çarpımı

İki matrisin çarpımı skalerlerin çarpımı yada vektörlerin çarpımından daha karmaşık bir işlemdir. İlk olarak çarpım işleminin tanımlı olması için ilk çarpanın sütun sayısı ile ikinci çarpanın satır sayısının eşit olması gerekir. İlk olarak özel bir durumla başlayalım:

$A = [a_i]$ bir satır matris ve $B = [b_j]$ bir sütun matris olsunlar ve aynı sayıda girdiye sahip olsunlar. AB çarpımı, A ve B matrislerin karşılık gelen girdilerinin çarpımlarının toplamı şeklinde elde edilen bir skalerdir, yani 1×1 matristir, yani

$$AB = [a_1, a_2, \dots, a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Eğer A ve B farklı sayıda girdiye sahip olsaydı AB çarpımı tanımlı olmazdı.

Örnek: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 9 = 38$

Şimdi matris çarpımını tanımlayalım:

$A = [a_{ik}]$ ve $B = [b_{kj}]$, A nın sütun sayısı ile B nin satır sayısının eşit olduğu iki matris olsun, yani A , $m \times p$ matris, B ise $p \times n$ matris olsun. Bu durumda AB çarpım matrisi bir $m \times n$ matristir ve ij . girdisi, A nın i . satırı ile B nin j . sütununun çarpımı şeklinde tanımlanır, yani

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

dir.

Uyarı: A nın sütun sayısı ile B nin satır sayısının eşit olmadığı durumda, yani A , $m \times p$ matris, B , $q \times n$ matris ve $p \neq q$ ise AB çarpımı tanımlı değildir.

Örnek:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ iki matris olsun.

A , bir 2×2 matris, B ise bir 2×3 matristir. A nın sütun sayısı ile B nin satır sayısı eşit olduğundan AB çarpımı tanımlıdır ve 2×3 matristir. AB çarpım matrisinin ilk satırını elde etmek için A nın ilk satırı, yani

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ ile B nin her sütununu, yani $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ yi sırasıyla çarpalım:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 7 \\ -1 & 17 & 12 \end{bmatrix}$$

AB çarpım matrisinin ikinci satırını elde etmek için A nın ikinci satırı, yani $[2 \ 3]$ ile B nin her sütununu, yani $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ yi sırasıyla çarpalım:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 7 \\ -1 & 17 & 12 \end{bmatrix}$$

bulunur.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri için matrislerini bulunuz.

A ve B , 2×2 matris, yani A nın sütun sayısı ile B nin satır sayısı eşit olduğundan AB çarpımı tanımlıdır ve 2×2 matristir.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \\ (-2) \cdot 2 + 3 \cdot (-2) & (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ -10 & 11 \end{bmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde, B nin sütun sayısı ile A nın satır sayısı eşit olduğundan BA çarpımı tanımlıdır ve 2×2 matristir.

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 1 + 5 \cdot (-2) & (-2) \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Bu örnekten de anlaşılacağı gibi, iki matrisin çarpımında sıranın önemi vardır, yani matris çarpımlarında $AB = BA$ her zaman doğru değildir.

Özellikler: A, B, C toplam ve çarpımlarının tanımlı olduğu herhangi üç matris, k ise herhangi bir skaler olmak üzere

1. $(AB)C = A(BC)$

2. $A(B + C) = AB + AC$

3. $(B + C)A = BA + CA$

4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

dir.

Son eşitlikten $0A = 0$ ve $B0 = 0$ olduğu görülür.

9.4. Bir Matrisin Transpozesi

Bir A matrisinin transpozesi, A nın sütunlarının satır olarak yazılmasıyla elde edilir ve A^T ile gösterilir, yani $A = [a_{ij}]$ bir $m \times n$ matris ise A nın transpozesi $A^T = [a_{ji}]$ bir $n \times m$ matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ matrislerinin transpozeleri, sırasıyla

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dür.

Dikkat ediniz ki bir satır matrisin transpozesi sütun matris, bir sütun matrisin transpozesi satır matristir.

Özellikler: A ve B toplam ve çarpımlarının tanımlı olduğu herhangi iki matris, k ise herhangi bir skaler olmak üzere

$$1. (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$2. (A^T)^T = A$$

$$3. (kA)^T = kA^T$$

$$4. (AB)^T = B^T A^T$$

Son eşitlikte dikkat edilmelidir ki iki matrisin çarpımının transpozesi, matrislerin transpozelerinin sırası değiştirilerek çarpımıdır.

9.5. Kare Matrisler

Satır ve sütun sayısı eşit olan matrislere kare matris denir. Bir $n \times n$ kare matrisine derecesi n matris yada n kare matris denir.

Yukarıda gördüğümüz gibi herhang iki matrisin toplamı ve çarpımı her zaman tanımlı değildir. Fakat, dereceleri aynı olan, örneğin $n \times n$ iki kare matrisin toplamı, çarpımı her zaman tanımlıdır ve $n \times n$ matristir. Ayrıca skalerle çarpımı ve transpozesi de $n \times n$ matristir.

$A = [a_{ij}]$ bir $n \times n$ kare matris olsun. A nın aynı alt indisli girdilerine, yani

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

girdilerine A nın diyagonalı yada esas diyagonalı denir. A nın diyagonal elemanlarının toplamına A nın izi denir ve $iz(A)$ ile gösterilir, yani

$$iz(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

dir.

Özellikler: A ve B iki n -kare matris, k ise herhangi bir skaler olmak üzere,

$$1. iz(A + B) = iz(A) + iz(B)$$

$$2. iz(kA) = k iz(A)$$

$$3. \operatorname{iz}(A^T) = \operatorname{iz}(A)$$

$$4. \operatorname{iz}(AB) = \operatorname{iz}(BA)$$

dır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ matrisleri 3×3 kare matrislerdir, yani 3-kare matrislerdir. Benzer şekilde

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 0 & 12 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 8 & 16 & -8 \\ 12 & 15 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & 11 \\ 12 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisleri de 3-kare matrislerdir.

$$A \text{ nın diyagonalı} = \{-1, 4, 5\} \text{ ve } A \text{ nın izi } \operatorname{iz}(A) = -1 + 4 + 5 = 8$$

$$B \text{ nın diyagonalı} = \{0, 0, -2\} \text{ ve } B \text{ nin izi } \operatorname{iz}(B) = 0 + 0 + (-2) = -2$$

dir. Ayrıca

$$\operatorname{iz}(A + B) = -1 + 4 + 3 = 6 = \operatorname{iz}(A) + \operatorname{iz}(B)$$

$$\operatorname{iz}(2A) = -2 + 8 + 10 = 16 = 2\operatorname{iz}(A)$$

$$\operatorname{iz}(AB) = 4 + 16 + (-4) = 16 = \operatorname{iz}(BA) \text{ Burada dikkat edilirse, } AB \neq BA \text{ olmasına rağmen izleri eşittir.}$$

$$\operatorname{iz}(A^T) = -1 + 4 + 5 = 8 = \operatorname{iz}(A)$$

Bir n-kare matrisin diyagonal girdileri 1 ve diğer tüm girdileri 0 ise bu matrise birim matris denir ve I_n ya da I ile gösterilir.

Herhangi bir $m \times n$ matris B için



dir.



Örnek: , 3. dereceden bir birim matristir.

A bir n -kare matris olmak üzere A nın kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanır:



Ayrıca , A nın girdileri ile aynı türden skalerler olmak üzere (reel yada kompleks), herhangi n . dereceden bir



polinomu için aşağıdaki gibi tanımlanır:



dır. Burada birim matristir. Eğer ise A ya polinomunun sıfırı yada kökü denir.

Örnek: ve olmak üzere yı bulunuz.



olduğu için ilk olarak yi bulalım:



Şimdi yi da yerine koyalım.



bulunur.

9.6. Terslenebilir Matrisler

Bir kare matrisi için



olacak şekilde bir matrisi varsa ya terslenebilir matris denir. Böyle bir matrisi tektir ve ye nın tersi denir ve ile gösterilir.

Örnek: ve olmak üzere



ve



olduğundan A ve terslenebilir matrislerdir ve  ve  dır.

Özellik: A ve terslenebilir iki matris ise AB de terslenebilirdir ve



dir.

Genelleştirecek olursak,  terslenebilir matrisler ise çarpımları da terslenebilirdir ve



matrisin tersi



herhangi bir 2×2 bir matris ve  olsun. Bu durumda A terslenebilirdir, tersini



ile gösterelim.  sayılarını şöyle buluruz:



Sonuç olarak,



dir.

Eğer  ise terslenebilir değildir.



Örnek:  matrisinin terslenebilir olup olmadığını inceleyiniz. Terslenebilir ise tersini bulunuz.



olduğundan A terslenebilirdir. Şimdi A nın tersi



i bulalım.



bulunur.

9.7. Bazı Özel Kare Matrisler

Diyagonal ve Üçgensel Matris: Bir  n -kare matrisinin diyagonalı dışındaki tüm girdileri sıfır ise matrisine diyagonal matris denir ve



şeklinde de gösterilir.

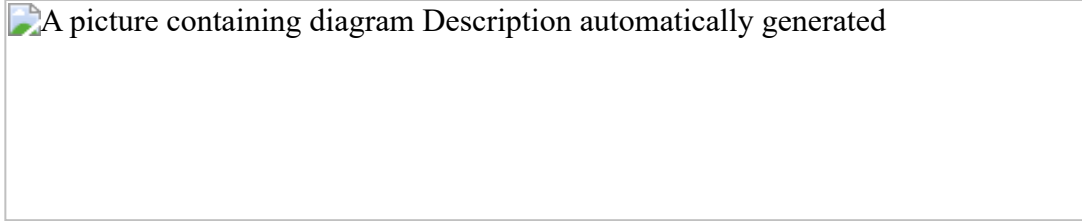


Örnek:  matrisi diyagonal matristir, çünkü diyagonal girdileri dışında tüm girdiler sıfırdır. Bu matrisi $diag(4, -2, 1)$ şeklinde de gösterebiliriz.



matrisi diyagonaldir ve  şeklinde de gösterilebilir.

Bir $A = [a_{ij}]$ n -kare matrisinin diyagonalinin altındaki tüm girdileri sıfır ise A matrisine üçgensel matris denir. 2., 3., ve 4. Dereceden üçgensel matris formları aşağıdaki gibidir:



Burada sıfır olan girdiler yazılmamış, boş bırakılmıştır.

Özellikler: $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ iki n -kare üçgensel matris, k bir skaler olsun.

1.  ve AB matrisleri de üçgenseldir ve diyagonalleri sırasıyla,



formundadır.

2. Herhangi bir  polinomu için  matrisi de üçgenseldir ve diyagonalı



formundadır.

3. A nın terslenebilir olması ancak ve ancak her diyagonal elemanı  sıfırdan farklı olması ile mümkündür ve tersi de üçgenseldir.

Bazı Özel Reel Kare Matrisler

A reel bir kare matris olsun, yani tüm girdileri reel sayılardan oluşsun. Bu tür matrisler ile transpozeleri arasındaki ilişkilerden bazı özel ilginç matris türleri ortaya çıkmaktadır.

a) Simetrik ve Ters Simetrik Matris: Eğer  ise A ya simetrik matris denir. Başka bir deyişle, eğer  ise $A = [a_{ij}]$ matrisine simetrik matris denir.

Eğer  ise A ya ters-simetrik matris denir. Başka bir deyişle, eğer  ise $A = [a_{ij}]$ matrisine ters-simetrik matris denir. Böyle bir matrisin diyagonal girdileri  olacağından sıfır olacaktır.

Örnek:  matrisi simetriktir. Çünkü, 

dır.

 matrisi ters-simetriktir. Çünkü, 

dır.

b) Ortogonal Matris: Eğer  ise A ya ortogonal matris denir. Başka bir deyişle,  ise A ya ortogonal matris denir. Tanımdan anlaşılacağı gibi, A ortogonal ise terslenebilir.

Örnek:  matrisi ortogonaldır. Çünkü,



ve



dır.

c) Normal Matris: Eğer  ise A ya normal matris denir.

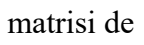
Tanımlarından kolayca çıkarılacağı gibi her simetrik, ters-simetrik yada ortogonal matris normal matristir.

Örnek:  matrisi normal matristir. Çünkü,

 ve $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$ olduğundan

 dır.

9.8.Kompleks Matrisler

A kompleks bir matris olsun, yani girdileri kompleks sayılardan oluşsun. Hatırlayalım ki bir  kompleks sayısının eşleniği  dir. Benzer şekilde bir A kompleks matrisinin eşleniği  matrisi de tanımlanabilir:

Bir  kompleks matrisinin eşleniği  matrisi, A nın her girdisinin eşleniği alınarak oluşan matristir, yani $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ dir.

Kompleks bir matrisin eşleniğinin transpozese, matrisin transpozeseinin eşleniğidir, yani

 dir. Elde edilen bu matrise A kompleks matrisinin eşlenik transpozese denir ve  ile gösterilir, yani



dir. Dikkat ediniz ki A reel bir matris ise  dir.

Örnek:  matrisi kompleks matristir. Çünkü girdileri kompleks sayılardan oluşmuştur. Bu matrisin eşlenik transpozeseini bulalım:



dir.

Bazı Özel Kompleks Matrisler

A bir kompleks kare matris olsun. Bu tür matrislerin, transpozeleri arasındaki ilişkilerden yukarıda gördüğümüz bazı özel reel kare matrislere benzer şekilde tanımlanan bazı özel kompleks matris türleri ortaya çıkmaktadır.

a) Hermit ve Ters-Hermit Matris: Eğer  ise A ya Hermit matris denir. Başka bir deyişle, eğer  ise $A = [a_{ij}]$ matrisine Hermit matris denir.

Eğer  ise A ya ters-Hermit matris denir. Başka bir deyişle, eğer  ise $A = [a_{ij}]$ matrisine ters-Hermit matris denir. Böyle bir matrisin diyagonal girdileri sıfır olacaktır.

b) Üniter Matris: Eğer  ise A ya üniter matris denir. Başka bir deyişle,  ise A ya üniter matris denir. Tanımdan anlaşılacağı gibi, A üniter ise terslenebilirdir.

c) Normal Matris: Eğer  ise A ya normal matris denir.

Örnek: 

matrislerini inceleyelim.

Her üç matris de kompleks sayı girdilere sahip olduğundan birer kompleks matrislerdir.



olduğundan A Hermit matristir.



Benzer şekilde,



olduğundan B üniter bir matristir.

$$C^H C = (\bar{C})^T C = \left(\begin{bmatrix} 2-3i & 1 \\ -i & 1-2i \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3i & -i \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 4-4i \\ 4+4i & 6 \end{bmatrix}$$

ve



$$= \begin{bmatrix} 14 & 4-4i \\ 4+4i & 6 \end{bmatrix}$$

olduğundan normal bir matristir.

9.9. Çözümlü Sorular



1)  eşitliğini sağlayan x, y, z, t sayılarını bulunuz.

Matrislerin toplam ve skalerle çarpım işlemlerinden



elde edilir. İki matrisin eşitliğinden



denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden  bulunur.

2)  ve  matrisleri için AB matrisini bulunuz.

A ,  bir matris ve  bir matristir. A nın sütun sayısı ile B nin satır sayısı aynı olduğundan AB çarpımı tanımlıdır ve  bir matristir.



3)  matrisi ve  polinomu için  yı bulunuz.



olacağından ilk önce  ü hesaplayalım.

 olduğundan  yi bulalım:



ve buradan



bulunur.  da yerine koyarsak

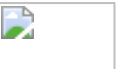


4) Aşağıdaki  matrislerin terslenebilir olup olmadığını inceleyiniz.

Bir  2×2 matrisi için  ise A terslenebilirdir.

a)  terslenebilir değildir, çünkü 

b)  terslenebilirdir, çünkü 

c)  terslenebilirdir, çünkü 

d)  terslenebilir değildir, çünkü 

e)  terslenebilirdir, çünkü 

5)  matrisinin simetrik olması için kaç olmalıdır?

Bir A matrisinin simetrik olması için  olmalıdır, yani



olmalıdır. İki matrisin eşitliğinden,  yani  elde edilir.

Bölüm Özeti

Bu bölümde matris konusu ele alınmıştır. Matrislerin toplam, skalerle çarpım ve çarpım işlemleri tanımlanmış ve bu işlemlerin özellikleri verilmiştir. Herhangi iki matris üzerinde çarpım işleminin her zaman tanımlı olmadığına dikkat çekilmiş, örneklerle gösterilmiştir. Daha sonra bir matrisin transpozese tanımı verilmiştir. Bir matrisin terslenebilir olması ve tersinin nasıl bulunacağı konusu ele alınmıştır. Bir 2x2 matrisin tersinin nasıl bulunacağına dair tanım dışında başka bir yöntem gösterilmiştir.

Ayrıca, kare matrislere geçilerek kare matrisler için özel durumlar incelenmiştir. Köşegen matris ve diyagonal matrisler verilmiş ve bunların özellikleri incelenmiştir. Girdileri reel sayılardan oluşan reel kare matrislerden önemli birkaç özel matris tipi gösterilmiştir. Bunlar; ortogonal, simetrik ve ters-simetrik matrislerdir. Bu matrislerin hangi özellikleri sağladığı gösterilmiş ve birbirleriyle ilişkileri verilmiştir. Daha sonra girdileri kompleks sayılardan oluşan kompleks kare matrisler incelenmiştir. Kompleks matrislerin eşleniğinin nasıl bulunduğu ve eşleniği ile transpozese arasında ilişkinin nasıl olduğu incelenmiştir. Reel kare matrislerde olduğu gibi kompleks kare matrislerden önemli birkaç özel matris tipi gösterilmiştir. Bunlar; Hermit, ters-Hermit ve üniter matrislerdir. Bu matrislerin hangi özellikleri sağladığı gösterilmiş ve birbirleriyle ilişkileri verilmiştir.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007
2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Linear Algebra, 6th edition, 2018

Ünite Soruları

Soru-1 :

$3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}$ eşitliğini sağlayan x,y,z,t sayıları için x+y+z+t sayısı aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 7

(•) - 8

(•) - 9

(•) - 10

(•) - 11

Cevap-1 :

10

Soru-2 :

(m×n), bir m×n matrisi gösterebilir. Aşağıdaki matris çarpımlarından hangisi tanımlıdır?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - (2×3)(3×2)

(•) - (1×2)(3×1)

(•) - (2×3)(2×3)

(•) - (4×4)(3×3)

(•) - (5×2)(3×1)

Cevap-2 :

(2×3)(3×2)

Soru-3 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
 matrisleri için AB matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - Tanımlı değildir.

Cevap-3 :**Soru-4 :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
 matrisleri için AB matrisi aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -8 & -1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 19 & 31 \\ 1 & -4 & -8 & -15 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 3 & -4 & -8 \end{bmatrix}$

(•) - d) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 9 & 31 \\ 1 & -4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$

(•) - Tanımlı değildir.

Cevap-4 :

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & 19 & 31 \\ 1 & -4 & -8 & -15 \end{bmatrix}$$

Soru-5 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin transpozesi aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(•) - Tanımlı değildir.

Cevap-5 :

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Soru-6 :

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin izi aşağıdakilerden hangisidir?qq
(Çoktan Seçmeli)

(•) - 5

(•) - -1

(•) - 6

(•) - 4

(•) - 3

Cevap-6 :

5

Soru-7 :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ matrisi ve $p(x) = 2x^3 - 3x + 5$ polinomu için $p(A)$ aşağıdakilerden hangisidir?qq
(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\begin{bmatrix} 108 & 81 \\ 87 & 6 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 87 & 6 \\ 108 & 81 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 87 & 81 \\ 108 & 6 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 6 & 81 \\ 108 & 87 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 81 & 87 \\ 108 & 6 \end{bmatrix}$

Cevap-7 :

$\begin{bmatrix} 87 & 81 \\ 108 & 6 \end{bmatrix}$

Soru-8 :

Aşağıdaki matrislerden hangisi terslenebilir değildir?

(Çoktan Seçmeli)

$$(\bullet) - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$(\bullet) - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\bullet) - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(\bullet) - \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$(\bullet) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cevap-8 :

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

Soru-9 :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin simetrik olması için } x \text{ kaç olmalıdır?qq}$$

(Çoktan Seçmeli)

$$(\bullet) - 4$$

$$(\bullet) - 5$$

$$(\bullet) - 6$$

$$(\bullet) - 7$$

$$(\bullet) - 0$$

Cevap-9 :

5

10. LINEER DENKLEM SİSTEMLERİ

10.1. Lineer Denklemler ve Çözümleri

 bilinmeyenler ve  reel yada kompleks sabitler olmak üzere

$$\text{[input field]} \quad (10.1)$$

formundaki denklemlere lineer denklemler denir. Lineer denklemlerin bu formdaki gösterilişine standart form denir. $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ sabitlerine $a_1, a_2, \dots, a_n$ bilinmeyenlerinin katsayıları, b sabitine ise denklemin sabit terimi denir.

 denklemini sağlayan  bilinmeyenlerinin değerlerinin oluşturduğu bir sıralı denklemin bir çözümüdür, yani eğer  değerleri (10.1) denkleminde yerine konulduğunda $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ ye eşit oluyorsa, bu değerlerin oluşturduğu sıralı

$$\text{[input field]}$$

denklemin bir çözümüdür. Bu durumda “ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ denklemini sağlar” denir.

Örnek:  denklemini  bilinmeyenli bir lineer denklemdir. x in katsayısı 1, y nin katsayısı -3 ve z nin katsayısı 2 dir. Denklemin sabit terimi 6 dır.

 ve  değerleri denkleminde yerine konulduğunda,

$$x - 3y + 2z = 5 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$$

olduğundan $u = (5, 1, 2)$,  denkleminin bir çözümüdür. Diğer taraftan , denklemin bir çözümü değildir, çünkü

$$\text{[input field]}$$

dır.

Tüm katsayıları sıfır olan bir lineer denkleme, yani

$$\text{[input field]}$$

formundaki lineer denkleme dejenere denklem denir. Dejenere denklemlerin çözümünün olup olmaması sadece b sabit terimine bağlıdır. Eğer  ise denklemin çözümü yoktur.  ise herhangi bir  sıralısı denklem için bir çözümdür.

10.2. Lineer Denklem Sistemleri

Aynı bilinmeyenlerden oluşan m ki veya daha fazla lineer denklemin oluşturduğu sisteme lineer denklem sistemi denir. m tane bilinmeyeni,  diyelim, olan n tane lineer denklemin,  diyelim, oluşturduğu bir lineer denklem sistemi

A picture containing text, antenna
Description automatically generated

(10.2)

formundadır. Lineer denklem sistemlerinin bu formda gösterilişine standart form denir. Burada a_{ij} ve b_i ler sabitlerdir. n sayısına, L_i denkleminde x_i bilinmeyeninin katsayısı, n sayısına ise L_i denkleminin sabit terimi denir. (10.2) lineer denklem sistemi $Ax=b$ sistem şeklinde okunur.

Eğer $n=m$ ise, yani denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşit ise, bu denklem sistemine kare sistem denir.

Eğer (10.2) lineer denklem sisteminin tüm sabit terimleri sıfırsa, yani $b_i=0$ ise bu denklem sistemine homojen lineer denklem sistemi denir. Sıfırdan farklı en az bir sabit terimi olan lineer denklem sistemlerine ise homojen olmayan lineer denklem sistemi denir.

(10.2) lineer denklem sistemlerinin tümünü sağlayan x_i bilinmeyenlerinin değerlerinin oluşturduğu sıralısına sistemin bir çözümü denir. Lineer denklem sisteminin tüm çözümlerinin kümesine de sistemin çözüm kümesi yada genel çözümü denir.

Bu derste, aksi belirtilmediği sürece bir lineer denklem sisteminin tüm katsayıları ve sabit terimleri reel sayılar olarak alınacaktır.

Örnek:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6$$

lineer denklem sisteminde 3 denklem 4 bilinmeyen olduğu için bu denklem sistemi bir 3×4 sistemdir.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

lineer denklem sisteminin bir çözümüdür. Gerçekten de, $x_1=1, x_2=1, x_3=1$ nun değerlerini lineer denklem sisteminde yerine koyduğumuzda

$$1 + 2(1) + 3(1) = 4$$

$$2(1) + 3(1) + 4(1) = 5$$

$$3(1) + 4(1) + 5(1) = 6$$

tüm lineer denklemleri sağladığını görürüz.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

ise lineer denklem sisteminin bir çözümü değildir. Çünkü, denklem sistemindeki birinci ve üçüncü denklemleri sağlarken, ikinci denklemini sağlamaz, yani ikinci denklem için bir çözüm değildir, gerçekten de

$$1 + 2(1) + 3(1) = 4$$

dir.

Eğer (10.2) lineer denklem sistemi bir veya daha fazla çözüme sahipse bu sisteme tutarlı denir. Eğer sistemin hiç çözümü yoksa bu sisteme tutarsız denir.

Herhangi bir lineer denklem sistemi ya tek çözüme sahiptir, ya çözümü yoktur yada sonsuz çözüme sahiptir.

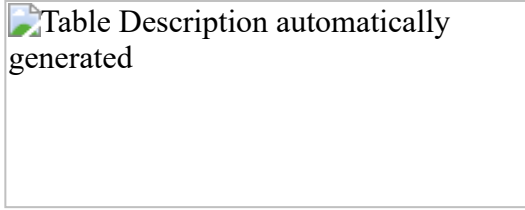
Bundan sonraki amacımız lineer denklem sistemlerinin çözümlerini araştırmak olacaktır.

İlk olarak, bir lineer denklem sisteminde bir dejenere denklem varsa, bu dejenere denklemin sabit terimi olsun, eğer  ise sistemin çözümü yoktur.  ise sistemden bu dejenere denklemi çıkarmak sistemin çözüm kümesini değiştirmez.

10.3. Genişletilmiş Katsayılar ve Katsayılar Matrisi

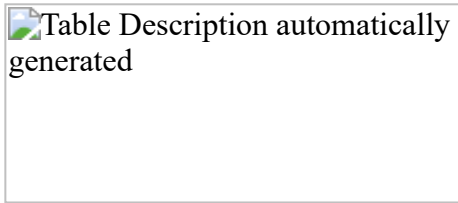
m denklem ve n bilinmeyenli (10.2) lineer denklem sistemini düşünelim. Bu sistem ile ilgili iki matris vardır:

Birincisi sistemin katsayılarından ve sabit terimlerinden oluşan genişletilmiş katsayılar matrisidir ve



formundadır.

İkincisi ise sadece sistemin katsayılarından oluşan katsayılar matrisidir ve



formundadır.

Örnek:



lineer denklem sisteminin genişletilmiş katsayılar matrisi



ve katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

dür.

Açıktır ki, bir lineer denklem sistemi genişletilmiş katsayılar matrisi aracılığıyla tamamen tanımlanabilir. Gerçekten de, genişletilmiş katsayılar matrisinin her satırı bir lineer denkleme karşılık gelir ve son sütun dışındaki her sütun bilinmeyenlerin katsayılarına karşılık gelirken, son sütun denklem sisteminin sabit terimlerine karşılık gelmektedir.

10.4. Lineer Denklem Sistemlerinin Matrisler Yardımıyla Gösterilişi

denklemlerli bilinmeyenli bir

A picture containing text, antenna
Description automatically generated

(10.2)

lineer denklem sistemi

Table Description automatically generated

yada



formundaki bir matris denkleminde denktir. Burada katsayılar matrisi, , bilinmeyenlerin sütun vektörü, ise sabit terimlerin sütun vektörüdür.

Bir lineer denklem sisteminin bir matris denkleminde denk olması, çözüm kümelerinin aynı olması anlamındadır.

Örnek:



lineer denklem sistemi ile

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matris denklemini denktir.

Lineer denklem sistemlerinin matris denklemini şeklinde gösterilişini, lineer denklem sistemlerinin çözümünü bulmak için kullanılan Gauss Eliminasyon Yönteminde kullanacağız. Bu yöntemde lineer denklem sisteminin kendisi yerine genişletilmiş katsayılar matrisi ile çalışılır. Genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde elementer işlemler diyeceğimiz bazı işlemler uygulanarak eşelon matris diyeceğimiz matris formları elde edilir. Şimdi bu kavramları tanıyalım:

10.5. Elementer Satır İşlemleri ve Satır Eşdeğer Sistemler

Satırları sırasıyla  ile gösterilen bir  matrisi alalım. Bu matrisin  satırındaki sıfırdan farklı ilk girdisine “öncü sıfırdan farklı girdi” denir. Matrisin bir satırı sadece sıfır girdilerden oluşuyorsa bu satıra da sıfır satır dendiğini hatırlayalım. Dolayısıyla sıfır satırların öncü sıfırdan farklı girdisi yoktur.

matrisi üzerinde aşağıdaki üç işlem tanımlansın.

 Matristeki satırlardan ikisinin yerini değiştirmek:  satırlarının yer değiştirmesi işlemi



şeklinde gösterilir.

 Matristeki satırlardan birinin yerine o satırın sıfırdan farklı bir skalerle çarpılmış formunu yazmak: satırı yerine  olmak üzere  satırını yazma işlemi



şeklinde gösterilir.

 Matristeki satırlardan birinin yerine bu satır ile sıfırdan farklı bir skalerle çarpılmış başka bir satırın toplamını yazmak: satırı yerine  olmak üzere  satırını yazma işlemi



şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki üç işleme elementer satır işlemleri denir.

ve iki matris olmak üzere, matrisi matrisine elementer satır işlemleri uygulanarak elde ediliyorsa ve matrislerine satır eşdeğer matrisler denir ve  ile gösterilir.

Elementer işlemler, ileride bir lineer denklem sisteminin çözümünü bulmak için kullanacağımız Gauss Eliminasyon Yönteminde, lineer denklem sistemine denk olan ve çözümleri daha kolay elde edilen bir lineer denklem sistemi bulmak için kullanılacaktır. Bulunacak olan bu sistemler üçgensel yada eşelon formda denklem sistemleri olarak bilinir.

10.6. Eşelon Matrisler

Bir matrisi aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. nın sıfır satırı varsa bu satırlar matrisin son satırlarında yer alır.
2. Bir satırın öncü sıfırdan farklı girdisi, önceki satırın öncü sıfırdan farklı girdisinin sağında yer alır.

Bu koşulları sağlayan matrisine eşelon matris denir.

Eşelon matrisin her satırındaki öncü sıfırdan farklı girdilerine eşelon matrisin pivotları denir.

Örnek:

A picture containing text
Description automatically generated

matrisini düşünelim. matrisinin sıfır satırı vardır ve matrisin son satırıdır. Birinci satırın öncü sıfırdan farklı girdisi  dir, yani 2. sütundadır.

İkinci satırın öncü sıfırdan farklı girdisi  tür, yani 4. sütundadır ve bir önceki satır olan birinci satırın öncü sıfırdan farklı girdisi  nin sağında yer alır.

Üçüncü satırın öncü sıfırdan farklı girdisi  tir, yani 6. sütundadır ve bir önceki satır olan ikinci satırın öncü sıfırdan farklı girdisi  ün sağında yer alır.

Dördüncü satırın öncü sıfırdan farklı girdisi  dir, yani 7. sütundadır ve bir önceki satır olan üçüncü satırın öncü sıfırdan farklı girdisi  in sağında yer alır.

Görüldüğü gibi matrisi bir eşelon matristir ve pivotları da  dir. Pivotlar, matrisin üzerinde çember içine alınarak gösterilmiştir.

Bir eşelon matrisin

1. Tüm pivotları 1
2. Her pivot bulunduğu sütunun sıfırdan farklı tek girdisi

ise bu eşelon matrise satır indirgenmiş eşelon matris denir.

Eşelon matris ile satır indirgenmiş eşelon matris arasındaki esas farkı eşelon matriste pivotların altındaki girdiler sıfır olmalıdır, satır indirgenmiş eşelon matriste ise tüm pivotlar 1 olmalı ve pivotların hem altındaki hem üstündeki girdiler sıfır olmalıdır.

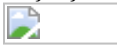
Örnek:

A picture containing text
Description automatically generated

matrislerini düşünelim. Bu matrisler eşelon formdadır. Gerçekten de, sıfırdan farklı satırlarındaki öncü sıfırdan farklı girdiler, bir önceki satırların öncü sıfırdan farklı girdilerinin sağında yer alır. Bu matrislerin pivot elemanları da çember içine alınarak gösterilmiştir. Bu eşelon matrislerden birinci ve dördüncü matrisler satır indirgenmiş eşelon matrisler değildir, çünkü pivotları 1 den farklıdır. İkinci matrisin pivotları 1 dir fakat pivotların bulunduğu sütunlardaki sıfırdan farklı tek girdi pivotlar değildir. Örneğin,  pivotunun bulunduğu sütunda, pivot dışında sıfırdan farklı olan  girdisi de vardır. Bu sebeple ikinci matris de satır indirgenmiş eşelon matris değildir. Üçüncü matriste ise tüm pivotlar 1 ve pivotların bulunduğu

sütunda pivotlar dışında sıfırdan farklı başla bir girdi yoktur. Bu yüzden üçüncü matris satır indirgenmiş eşelon matristir.

10.7. Gauss Eliminasyon Yöntemi

Herhangi bir matrisinin satır eşdeğer olduğu tek bir satır indirgenmiş eşelon matris vardır. matrisinin eşelon formundaki pivotlarının sayısına matrisinin rankı denir ve  ile gösterilir.

Bir matrisin eşelon formuna yada satır indirgenmiş eşelon formuna elementer satır işlemleri kullanılarak elde edilebilir. Bu elde etme yöntemine Gauss Eliminasyon Yöntemi denir. Gauss Eliminasyon yöntemini bir algoritma ile açıklayabiliriz:

 herhangi bir matris olsun.

Algoritma-1 (İleri Eliminasyon):  matrisini, satır elementer işlemler kullanılarak eşelon formuna dönüştürmek için izlenen adımlar dizisidir.

Adım 1: Sıfırdan farklı girdisi olan ilk sütunu bul. Eğer böyle bir sütun yoksa çık, çünkü

matrisi bir sıfır matristir. Varsa, sıfırdan farklı girdisi olan ilk sütun sütun olsun.

a) sütunda sıfırdan farklı ilk girdi  olsun, yani  olsun. Eğer sütunda sıfırdan farklı ilk girdi  değil ise, birinci satırı Sütunun sıfırdan farklı girdiye sahip olan bir satır ile yer değiştir, yani  elementer işlemini uygulayarak  elde et.

b)  olduğu için  i, altındaki tüm girdileri sıfır yapmak için birinci satırın pivotu olarak kullan, yani  için

i.  i bul.

ii. . satırı  ile değiştir, yani  satıra  elementer satır işlemini uygula.

Adım 2: Adım 1 i, elde edilen son alt matrisin ilk satır dışındaki tüm satırları için uygula. Son alt matrisin sıfırdan farklı girdisi olan ilk sütunu sütun olsun. Adım 2 nin sonunda  olsun.

Adım 3: Bu işleme, sadece sıfır satıra sahip alt matris elde edilinceye kadar devam et.

Son eşelon matris formunda sıfırdan farklı satır sayısı olsun. Dolayısıyla bu ileri eliminasyon algoritmasının sonunda  olmak üzere tane pivot vardır.

1.b)i. adımındaki



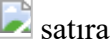
sayısına çarpan denir.

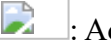
Algoritma-2 (Geri Eliminasyon)  pivot girdilerine sahip herhangi bir A  eşelon matrisini, satır elementer işlemler kullanılarak, satır indirgenmiş eşelon formuna dönüştürmek için izlenen adımlar dizisidir.

Adım 1:

a) Sıfırdan farklı son satır  yi  ile çarp, yani  elementer satır işlemini uygula. Böylece  pivotu olacak, yani  yap.

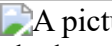
b)  pivotunu, pivot üstündeki tüm girdileri sıfır yapmak için kullan, yani  için i.  i bul.

ii. . satırı  ile değiştir, yani  satıra  elementer satır işlemini uygula.

Adım 2- Adım  : Adım 1 i  satırları için uygula.

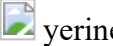
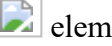
Adım : İlk satır  i  ile çarp, yani [ elementer satır işlemini uygula. Böylece  pivotu olacak, yani  yap.

Örnek:

 A picture containing text, clock, watch Description automatically generated

matrisinin eşelon ve satır indirgenmiş eşelon formunu bulunuz.

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı  i pivot olarak düşünelim. matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak  pivotunun altındaki  ve  girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır  yerine  ile üçüncü satır  yerine  ile değiştirelim, yani bu satırlara [ elementer satır işlemini uygulayalım:

 A picture containing text, clock, watch Description automatically generated

elde edilir. Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı  yi pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak  pivotunun altındaki  girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır  yerine  ile değiştirelim, yani [ elementer satır işlemini uygulayalım:

 A picture containing text, clock Description automatically generated

elde edilir.

Son matrise baktığımızda eşelon formda ulaştığı görülür. Dolayısıyla matrisinin eşelon formu

A picture containing text, object, clock Description automatically generated

matrisidir ve pivotları ,  ve  dir, yani  tür.

Şimdi bu eşelon formundan devam ederek A matrisinin satır indirgenmiş eşelon formunu bulalım. Bunun için pivotları 1 yapmalıyız ve pivotların bulunduğu sütundaki pivot dışında tüm girdileri sıfır yapmalıyız. Üçüncü satırdan başlayalım. İlk olarak  pivotunu 1 yapmak için  yerine  yazalım, yani [

A picture containing text, object, clock Description automatically generated

Şimdi  pivotunun üstündeki  ve  girdilerini sıfır yapalım. Bunun için

 yerine  ile birinci satır  yerine  ile değiştirelim, yani bu satırlara [

A picture containing text, object, clock Description automatically generated

elde edilir. Üçüncü pivot için istenenler elde edildiğine göre şimdi ikinci pivota geçelim. İkinci pivot  yi 1 yapalım. Bunun için yukarıda son matriste  yerine  yazalım, yani  elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, object, clock Description automatically generated

Şimdi  pivotunun üstündeki  girdisini sıfır yapalım. Bunun için

birinci satır  yerine  ile değiştirelim, yani bu satırlara [ elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, object, clock, watch Description automatically generated

elde edilir. Bu son matrise baktığımızda tüm pivotlar 1 ve pivotların bulunduğu sütunda pivot dışında başla sıfırdan farklı girdi yoktur. Dolayısıyla, bu matris satır indirgenmiş eşelon formdadır, yani A matrisinin satır indirgenmiş eşelon formu

A picture containing text, object, clock, black Description automatically generated

dur.

10.8. Lineer Denklem Sistemlerinin Matris Çözümü

denklemler bilinmeyenli bir

A picture containing text, antenna
Description automatically generated

(10.2)

lineer denklem sisteminin matris formu olan

Table Description automatically generated

yada



denklemini düşünelim. Hatırlayalım ki, burada  katsayılar matrisi, , bilinmeyenlerin sütun vektörü,  ise sabit terimlerin sütun vektörüdür.

Lineer denklem sistemlerinin çözüm yollarından biri, denklemlerin kendileriyle çalışmak yerine sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi  ile çalışmaktır. matrisini Gauss Eliminasyon Yöntemi yardımıyla eşelon formuna indirgediğimizde, lineer denklem sisteminin bir çözüme sahip olup olmayacağını ve çözümlerinin ne olacağını bulabiliriz.

1. genişletilmiş katsayılar matrisine uyguladığımız herhangi bir elementer satır işlemi, lineer denklem sistemine uygulanan işleme denktir.
2. Lineer denklem sisteminin çözümünün olması ancak ve ancak genişletilmiş katsayılar matrisin eşelon formunda  olmak üzere  formunda bir satır olmaması ile mümkündür.
3. Lineer denklem sisteminde  (bilinmeyen sayısı) ise denklem tek çözüme sahiptir.

katsayılar matrisin eşelon formunda her sütunda pivotlar olmak zorunda değildir. Eğer eşelon formda, sistemin bilinmeyenlerinin katsayılarının oluşturduğu tüm sütunlarda pivot varsa, yani pivot sayısı bilinmeyen sayısına eşit ise sistemin tek çözümü vardır. Eğer eşelon formda sistemin pivota sahip olmayan bilinmeyenlerinin katsayılarının oluşturduğu sıfırdan farklı bir sütun var ise, yani bilinmeyen sayısı pivot sayısından büyük ise sistemin çözümü serbest değişkenlere (pivot olmayan sütuna karşılık gelen bilinmeyenlere) bağlıdır, dolayısıyla sistemin sonsuz çözümü vardır.

Bunu bir örnekle daha iyi anlayabiliriz:

Örnek:





sisteminin çözümünü araştıralım:

Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi

A picture containing text, clock, gauge Description automatically generated

yi satır eşelon formuna indirgeyelim:

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı i pivot olarak düşünelim. matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak pivotunun altındaki ve girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır yerine ile üçüncü satır yerine ile değiştirelim, yani bu satırlara elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, clock Description automatically generated

Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı i pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak pivotunun altındaki girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır yerine ile değiştirelim, yani elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, clock, gauge, watch Description automatically generated

Son matrise baktığımızda eşelon forma ulaştığı görülür. Dolayısıyla matrisinin eşelon formu

A close-up of a calculator Description automatically generated with low confidence

matrisidir ve pivotları , dir ve ve pivot değişkenlerdir. Pivot olmayan diğer bilinmeyenler ve ise serbest değişkenlerdir. Dolayısıyla sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

Eşelon formdan elde edilen çözümler şöyledir:

1. satırdan elde edilen eşitliğinden ve ve

2. satırdan elde edilen eşitliğinden bulunur.

Dolayısıyla sistemin çözüm kümesi = 

Örnek:



sisteminin çözümünü araştıralım:

Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi

A picture containing text, clock, watch Description automatically generated

yi satır eşelon formuna indirgeyelim:

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı  i pivot olarak düşünelim. matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak  pivotunun altındaki  ve  girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır  yerine  ile üçüncü satır  yerine  ile değiştirelim, yani bu satırlara  elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, clock, watch, gauge Description automatically generated

Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{22} = 1$ i pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak $a_{22} = 1$ pivotunun altındaki  girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır  yerine  ile değiştirelim, yani  elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, clock, gauge Description automatically generated

Son matrise baktığımızda eşelon forma ulaştığı görülür. Dolayısıyla matrisinin eşelon formu

A picture containing text, object, clock, watch Description automatically generated

matrisidir. Bu matrisin son satırından  dejenere denklemi elde edildiğinden verilen lineer denklem sisteminin çözümü yoktur.

Örnek:

lineer denklem sisteminin çözümünü araştıralım.

Sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi

A picture containing text, object, clock, watch
Description automatically generated

yi satır eşelon formuna indirgeyelim:

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı i pivot olarak düşünelim. matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak pivotunun altındaki ve girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır yerine ile üçüncü satır yerine ile değiştirelim, yani bu satırlara elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, object, clock, watch
Description automatically generated

Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı $a_{22} = 1$ i pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak $a_{22} = 1$ pivotunun altındaki girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır yerine ile değiştirelim, yani elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, clock
Description automatically generated

Son matrise baktığımızda eşelon forma ulaştığı görülür. Dolayısıyla matrisinin eşelon formu

A picture containing text, object, clock
Description automatically generated

matrisidir ve pivotları , $a_{22} = 1$ ve dir. Görüldüğü gibi ve bilinmeyenleri pivot değişkenlerdir. Pivot olmayan bilinmeyen yoktur, yani bilinmeyen sayısı pivot sayısına eşittir. Dolayısıyla sistemin tek bir çözümü vardır.

Eşelon formdan elde edilen bu çözüm şöyledir:

3. satırdan elde edilen  eşitliğinden  ve

2. satırdan elde edilen  eşitliğinden 

1. satırdan elde edilen  eşitliğinden  bulunur.

Dolayısıyla sistemin çözüm kümesi =  tür.

10.9. Bir Kare Matrisin Tersini Bulmak için Bir Yöntem

Bir n -kare matrisin terslenebilir olması ancak ve ancak matrisinin birim matrise satır eşdeğer olmasıdır.

Terslenebilir bir matrisin tersini bulmak için elementer satır işlemlerini kullanacağımız bir yöntem vardır. Bu yöntemi aşağıdaki algoritmayla verebiliriz:

herhangi n -kare matris olsun.

Algoritma-3:

Adım 1: ,  matrisini oluştur, yani matrisinin sol tarafı I_n matrisi, sağ tarafı birim matrisidir.

Adım 2: I_n yi satır indirgenmiş eşelon forma indirge.

Satır indirgenmiş eşelon forma indirgenirken I_n nin tarafındaki satırlar sıfır satır olursa I_n nin tersi yoktur.

Adım 3: I_n yi

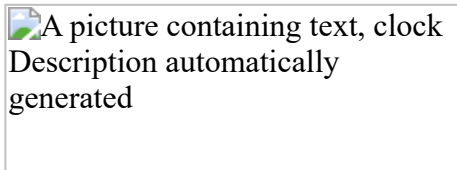


satır indirgenmiş eşelon formuna indirge, yani I_n nin sol tarafında I_n yerine olacaktır.

Adım 4:  dir, yani I_n nin satır indirgenmiş eşelon formunda sağ tarafındaki matristir.

Örnek:  matrisinin terslenebilir olup olmadığını araştırınız. Terslenebilir ise tersini bulunuz.

İlk önce  matrisini oluşturalım:



M nin  formunda satır indirgenmiş eşelon formunu bulalım:

İlk olarak 1. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı  i pivot olarak düşünelim. matrisinin eşelon formunda pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından ilk adım olarak  pivotunun altındaki  ve  girdilerini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

İkinci satır  yerine  ile üçüncü satır  yerine  ile değiştirelim, yani bu satırlara  elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, object, clock Description automatically generated

Şimdi bu son matris üzerinden devam edelim. 2. satırın öncü sıfırdan farklı elemanı  i pivot olarak düşünelim. Pivotun altındaki tüm girdiler sıfır olacağından benzer şekilde olarak  pivotunun altındaki  girdisini elementer satır işlemleri kullanarak sıfır yapalım:

Üçüncü satır  yerine  ile değiştirelim, yani  elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, object, clock, watch Description automatically generated

Son matris  matrisinin eşelon formudur. Satır indirgenmiş eşelon forma getirmek için  pivotunun üstündeki girdileri  ve  girdilerini sıfır yapalım:

 yerine  ile birinci satır  yerine  ile değiştirelim, yani bu satırlara  elementer satır işlemini uygulayalım ve bu işlemlerden sonra da  satırını (-1) ile çarparak $a_{33} = 1$ yapalım, yani  elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, object, clock Description automatically generated

Son olarak  satırını (-1) ile çarparak $a_{22} = 1$ yapalım, yani  elementer satır işlemini uygulayalım:

A picture containing text, clock, gauge Description automatically generated

Şimdi



formunda olduğundan matrisi terslenebilir ve



bulunur.

Bölüm Özeti

Bu bölümde lineer denklem sistemleri ele alınmıştır. Bir lineer denklem sisteminin kanonik ve matris formunda nasıl gösterildiği verilmiştir. Daha sonra lineer denklem sistemini çözmek için kullanılacak olan Gauss Eliminasyon Yöntemi için gerekli olan kavramlar gösterilmiştir. Bunlar; katsayılar matrisi, genişletilmiş katsayılar matrisi, temel elementer satır işlemleri, bir matrisin eşelon formu olmuştur. Bu kavramlar verildikten sonra ve özellikleri incelendikten sonra Gauss Eliminasyon Yöntemi algoritmalar halinde verilerek bir lineer denklem sisteminin çözümünün olup olmayacağı, varsa nasıl olacağı durumları ele alınmıştır.

Son olarak, bir kare matrise temel elementer satır işlemleri uygulayarak o matrisin terslenebilir olup olmayacağı, terslebilir ise tersinin ne olacağı konusunda bir yöntem de verilmiştir. Böylece bir matrisin terslenebilirliği ve tersi için tanımı dışında bir başka yöntem daha öğrenilmiştir.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007
2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Linear Algebra, 6th edition, 2018

Ünite Soruları

Soru-1 :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{bmatrix}$ A matrisinin satır indirgenmiş eşelon formu aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 23 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & 1 & 26 & 23 \end{bmatrix}$

Cevap-1 :

Soru-2 :

$$x + 2y - 3z = 4$$

$$7x + 3y - 4z = 5$$

$$8x - 9y + 6z = 1 \quad \text{lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi aşağıdakilerden hangisidir?}$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & -4 & 5 \\ 8 & -9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 6 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 8 & -9 & 1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \end{bmatrix}$

Cevap-2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

Soru-3 :

$$x + 2y - 3z = 4$$

$$7x + 3y - 4z = 5$$

$$8x - 9y + 6z = 1 \quad \text{lineer denklem sisteminin genişletilmiş katsayılar matrisi aşağıdakilerden hangisidir?}$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & -4 & 5 \\ 8 & -9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 6 \end{bmatrix}$

$$(\bullet) - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 8 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\bullet) - \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

Cevap-3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 3 & -4 & 5 \\ 8 & -9 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Soru-4 :

$$x + 2y - z = 3$$

$$x + 3y + z = 5$$

$3x + 8y + 4z = 17$ lineer denklem sisteminin çözümü hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - Çözümü yoktur.
- (•) - Sıfır çözüme sahiptir.
- (•) - Sonsuz sayıda çözümü vardır.
- (•) - bir çözümüdür.
- (•) - bir çözümdür.

Cevap-4 :

bir çözümdür.

Soru-5 :

$$x - 2y + 4z = 2$$

$$2x - 3y + 5z = 3$$

$3x - 4y + 6z = 7$ lineer denklem sisteminin çözümü hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - Çözümü yoktur.
- (•) - Sıfır çözüme sahiptir.
- (•) - Sonsuz sayıda çözümü vardır.
- (•) - bir çözümüdür.
- (•) - Tek çözümü vardır.

Cevap-5 :

Çözümü yoktur.

Soru-6 :

$$\begin{aligned}x + y + 3z &= 1 \\2x + 3y - z &= 3 \\5x + 7y + z &= 7\end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümü hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - Çözümü yoktur.
- (•) - Sıfır çözüme sahiptir.
- (•) - Sonsuz sayıda çözümü vardır.
- (•) - (0,-2,3) bir çözümüdür.
- (•) - Tek çözüme sahiptir.

Cevap-6 :

Sonsuz sayıda çözümü vardır.

Soru-7 :

matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 6 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 6 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 16 & 11 & -3 \\ 7/2 & 5/2 & 1/2 \\ -5/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} -16 & -11 & 3 \\ 7/2 & 5/2 & -1/2 \\ -5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Cevap-7 :

$$\begin{bmatrix} -16 & -11 & 3 \\ 7/2 & 5/2 & -1/2 \\ -5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Soru-8 :

$3x + 2 = 5x + 7 - 2x$ lineer denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $\{5\}$
- (•) - $\{1,2\}$
- (•) - Çözüm yoktur.
- (•) - $\{0\}$
- (•) - Tüm reel sayılar

Cevap-8 :

Çözüm yoktur.

Soru-9 :

$6x + 2 - 4x = 5 + 2x - 3$ lineer denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

- (•) - $\{5\}$
- (•) - $\{1,2\}$
- (•) - Çözüm yoktur.
- (•) - $\{0\}$
- (•) - Tüm reel sayılar

Cevap-9 :

Tüm reel sayılar

11. DETERMİNANT

11.1. Determinant

Bir , -kare matrisin determinanı ,  yada

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ile gösterilir ve görüldüğü  matrisi ile ilişkili bir fonksiyondur. Skalerlerin  dikdörtgen dizisi şeklinde yazıldığı ve iki çizgi ile çevrelendiği bu form bir matris değildir. Bununla birlikte, bir matrisin girdileri yardımıyla oluşan bu forma  dereceden determinant denir.

Determinantları, özel determinantlar olan 1.,2., ve 3. dereceden determinantları inceleyerek tanımaya başlayalım.

1. ve 2. Dereceden Determinantlar

Bir , -kare matrisin determinanı

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir , -kare matrisin determinanı

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Görüldüğü gibi  bir matrisin determinanı, matrisin girdisindeki skalere eşittir.  matrisin determinanı da yine matrisin girdileri arasındaki bir ilişki ile tanımlıdır. Bu ilişkiyi akılda daha kolay tutmak için şöyle görselleştirebiliriz:

A picture containing text, gauge Description automatically generated

Yani,  matrisin determinanı, + etiketli ok üzerindeki girdilerin çarpımından, - etiketli ok üzerinde kalan girdilerin çarpımının farkına eşittir.

Örnek:  matrisi bir  matris olduğu için  dir.

Uyarı: Determinantın  gösterimini, mutlak değer işareti ile karıştırmayınız!

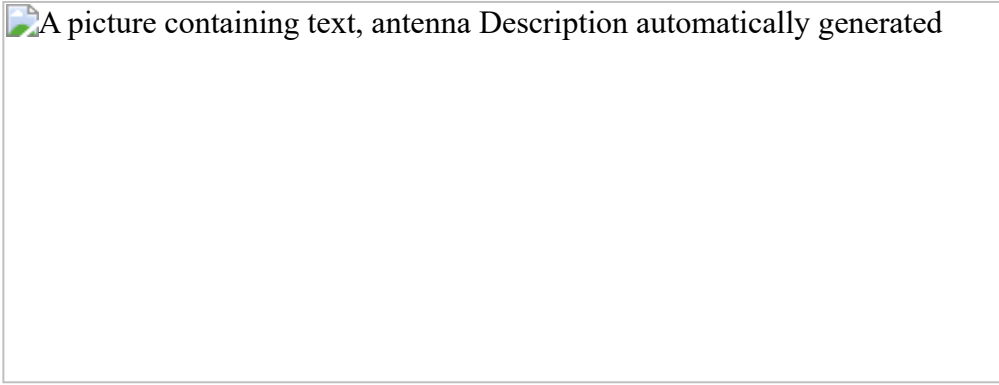
 matrisinin determinanı  tür.

3. Dereceden Determinant

1. yol: Bir , -kare matrisin determinanı



şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi determanatta altı adet toplanan terim vardır ve bu terimler verilen matrisin girdilerinden oluşmuştur. Toplanan terimlerin ilk üçünü + işaretiyle etiketli, son üçünü ise – işareti ile etiketli olarak düşünürsek 3. Dereceden determinanı akılda kolay kalması açısından şöyle görselleştirebiliriz:



Bu görselde, + işaretli okların her birinin üzerindeki terimleri çarpıp toplayarak elde edilen toplam ile - işaretli okların her birinin üzerindeki terimleri çarpıp toplayarak elde edilen toplamın farkı 3. Dereceden determinanı verir.

Örnek:  matrisinin determinanı

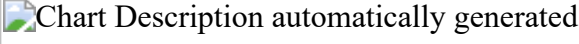


bulunur.

2. yol: Bir , -kare matrisin determinantını şu şekilde de yazabiliriz:

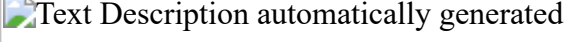


Determinantı hesaplamak için kullanılan bu formülün 2. Dereceden determinant hesabına dayandığı görülmektedir. Bu formülü akılda tutmak için şöyle görselleştirebiliriz:



Burada determinant formülünde  ve a_{13} katsayılarının bulunduğu gölgeli sütun ve satırları çıkardığımızda geriye kalan  matrisler ile ilgili katsayıların çarpımı görselleştirilmiştir.

Örnek:



11.2. Permütasyon

 kümesinden  kümesine giden bire-bir ve üzerine bir fonksiyonuna permütasyon denir. Başka bir deyişle,  sayılarının kendi içlerinde bir dizilişine permütasyon denir. Bir permütasyonu  olmak üzere

 yada 

şeklinde gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere,  permütasyonu  sayılarının farklı bir sırada dizilişidir.

Tüm permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir ve n elemanlı bir kümenin tüm mümkün permütasyonlarının sayısı $n!$ dir, yani S_n kümesinin eleman sayısı $n!$ dir.

Bir  permütasyonu için σ^{-1} nin ters fonksiyonu  de bir permütasyondur, yani,  dir.

İki  permütasyonunun bileşke fonksiyonu  da bir permütasyondur, yani $\sigma \circ \tau \in S_n$ dir.

Örnek:

1. Birim fonksiyon  da bir permütasyondur, yani  dir. Aslında



permütasyonudur.

2.  kümesi üzerinde iki tane permütasyon vardır, çünkü $\{1, 2\}$ ve $\{2, 1\}$ elemanlarının kendi içlerinde iki farklı dizilişi vardır:  ve  dir. Gerçekten de  olduğundan $\{1, 2\}$ nin  tane elemanı vardır.

3.  kümesi üzerinde altı tane permütasyon vardır, çünkü  olduğundan  tane elemanı vardır. Bu permütasyonlar da ,  ve  elemanlarının kendi içlerindeki farklı dizilişleri olacağından, , , , , ,  dir.

Bir Permütasyonun İşareti

 herhangi bir permütasyon olsun,  diyelim. Bir  tamsayı ikilisi için  ve  dizilişinde  dan önce geliyorsa  ikilisine  da bir inversiyon denir. Eğer  nın inversiyonlarının sayısı çift ise  ya çift permütasyon, tek ise  ya tek permütasyon denir.  nın işareti ise  ile gösterilir ve



şeklinde tanımlanır.

Örnek:

1.  permütasyonunun işaretini belirleyiniz.

Her  elemanı için  dan büyük ve  da  dan önce gelen elemanları sayalım:

 için  den büyük olan  elemanları vardır. Bu elemanlardan  ve  dizilişinde  den önce gelir. O halde  durumunda  nın iki inversiyonu vardır: .

 için  den büyük olan  elemanları vardır. Bu elemanlardan  ve  dizilişinde  den önce gelir. O halde  durumunda  nın üç inversiyonu vardır: .

 için  ten büyük olan  elemanları vardır. Bu elemanlardan hiçbiri  dizilişinde  ten önce gelmemektedir. O halde  durumunda  nın inversiyonu yoktur.

 için  ten büyük olan  elemanı vardır ve 5,  dizilişinde  ten önce gelmemektedir. O halde  durumunda  nın inversiyonu yoktur.

 için  ten büyük eleman olmadığından  durumunda da  nın inversiyonu yoktur.

O halde  nın toplam 5 tane inversiyonu vardır, yani  tek fonksiyondur ve işareti  dir.

2.  birim permütasyonunda hiç inversiyon olmadığından çift permütasyondur ve  dir.

11.3. Herhangi Dereceli Determinantlar

, bir  -kare matris olmak üzere  nın her satırından sadece bir eleman ve her sütunundan sadece bir eleman alınsın. Bu  elemanın çarpımı



formunda yazılır. Burada çarpanlar ardışık satırlardan gelir, bu sebeple ilk alt indisler  düzenindedir. İkinci alt indisler ise farklı sütunlardan geleceği için  de bir  permütasyonu oluşturur. Dolayısıyla

de her bir permütasyon yukarıdaki gibi bir çarpım oluşturur, yani bir n -kare matrisi için toplam $n!$ tane böyle farklı çarpımı vardır.

, bir n -kare matrisinin yukarıdaki $n!$ tane çarpım teriminin karşılık gelen permütasyonlarının işaretleriyle çarpılıp toplanmasına matrisinin determinantı denir ve  yada  ile gösterilir, yani

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

veya

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

dir. n -kare matrisin determinantına n . dereceden determinant denir.

Örnek:. Şimdi determinantın genel tanımından bölümün başında verdiğimiz 1., 2. ve 3. dereceden determinant tanımlarını elde edelim.

1. , 1 -kare matrisin determinantını bulalım. Burada  olduğundan de sadece bir permütasyon vardır: , yani  dir. Bu permütasyonun hiç inversiyonu olmadığından çift permütasyondur ve  dir. Şimdi determinant tanımında yerine koyalım:

$$\det(A) = 1 \cdot a_{11}$$

dir.

2. , 2 -kare matrisin determinantını bulalım. Burada  olduğundan de  tane permütasyon vardır:  ve , yani 12 permütasyonunda  ve  dir. 21 permütasyonunda ise  ve  dir.  permütasyonun hiç inversiyonu olmadığından çift permütasyondur ve  dir.  permütasyonun (2,1) şeklinde bir tane inversiyonu olduğundan tek permütasyondur ve  dir. Şimdi determinant tanımında yerine koyalım:

$$\det(A) = 1 \cdot a_{11}a_{22} - 1 \cdot a_{12}a_{21}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

bulunur.

3.  bir 3 -kare matris olsun. Burada  olduğundan de  tane permütasyon vardır: , , , , , . 123 permütasyonunda  ve  ve  tür. 132 permütasyonunda  ve  ve  dir. 213 permütasyonunda  ve  ve  tür. 231 permütasyonunda  ve  ve  dir. 312 permütasyonunda  ve  ve  dir. 321 permütasyonunda  ve  ve  dir. , ,  permütasyonları çift ve işaretleri 1 iken , ,  permütasyonları tek ve işaretleri (-1) dir. Şimdi determinant tanımında yerine koyalım:

$$\det(A) = 1 \cdot a_{11}a_{22}a_{33} + 1 \cdot a_{12}a_{23}a_{31} + 1 \cdot a_{13}a_{21}a_{32} - 1 \cdot a_{11}a_{23}a_{32} - 1 \cdot a_{12}a_{21}a_{33} - 1 \cdot a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$



bulunur.

Matrisin boyutu arttıkça determinantın tanımında toplanacak terim sayısı da artacağından büyük matrislerin determinantını hesaplamak için işimizi kolaylaştıracak hesaplama yöntemleri vardır. Bunu ileriki bölümlerde göreceğiz.

11.4. Determinantın Özellikleri

1. Bir $n \times n$ matrisinin determinantı ile transpozisinin determinantı eşittir, yani



dir.

2. $n \times n$ bir kare matris olmak üzere

- a) bir sıfır satır yada sıfır sütuna sahipse $|A| = 0$ dır.
- b) n nın iki satırı yada iki sütunu birbirlerinin bir katı ise $|A| = 0$ dır.
- c) üçgensel bir matris ise $|A|$ diyagonal elemanların çarpımıdır.

3. $n \times n$ bir kare matris olmak üzere, B ya uygulanan elementer satır işlemleri altında elde edilen B matrisinin determinantı şöyledir:

- a) n nın herhangi iki satırının yada sütunun yerinin değiştirilmesiyle elde edilen B matrisinin determinantı, n nın determinantının negatifine eşittir, yani

$$|B| = -|A|$$

dir.

- b) n nın bir satırının yada sütununun bir k skaleri ile çarparak elde edilen B matrisinin determinantı $|B| = k|A|$ dır.

- c) n nın bir satırının (yada sütununun) bir katını başka bir satır (yada sütuna) eklenmesiyle elde edilen matrisinin determinantı $|B| = |A|$ dır.

4. İki $n \times n$ ve $m \times m$ matrisinin çarpımının determinantı, matrislerin determinantlarının çarpımıdır, yani



dir.

5. $n \times n$ bir kare matris olmak üzere aşağıdakiler denktir:

- a. n nın terslenebilirdir.

b. $|A| \neq 0$ dır.

c.  denklemleri sadece sıfır çözüme sahiptir.

11.5. Minör ve Kofaktörler

 , bir n -kare matris olsun. n nın i satırı ile j sütununun silinmesiyle elde edilen  -kare matrisi  ile gösterelim.  nin determinanı $|M_{ij}|$ ye, n nın  girdisinin minörü denir.  nin kofaktörü ise  ile gösterilir ve

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse  bir matris iken  kofaktör bir skalerdir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisinin  ve  girdilerinin minör ve kofaktörlerini bulunuz.

 girdilerinin minörünü bulmak için önce A matrisinin 2. satır ve 3. sütununu silelim

 A picture containing calendar
Description

ve kalan girdilerin oluşturduğu  matrisini bulalım:  . Bu matrisin determinanı  ün minörüdür:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3$$

ve  ün kofaktörü

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = (-1)^5 \cdot (-3) = 3$$

dır.

 girdilerinin minörünü bulmak için önce A matrisinin 3. satır ve 1. sütununu silelim

 A picture containing calendar
Description

ve kalan girdilerin oluşturduğu  matrisini bulalım:  . Bu matrisin determinanı  ün minörüdür:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3$$

ve  ün kofaktörü



dür.

11.6. Laplace Açılımı



bir n -kare matris olmak üzere A matrisinin determinanı, matrisin herhangi bir satır yada sütunundaki girdilerin kofaktörleriyle çarpımlarının toplamıdır.

Örneğin, A satıra göre A nın determinantının Laplace açılımı



dir.

A sütuna göre A nın determinantının Laplace açılımı



dir.

Tanımdan da görüldüğü gibi, Laplace açılımı, bir matrisin determinantını hesaplamak için kullanılan bir yöntemdir. Daha önce de bahsettiğimiz gibi büyük boyutlu matrislerin determinantlarını, detetrminant tanımından yapmak zordur. Laplace açılımı bu noktada büyük kolaylık sağlar.

Örnek:

A picture containing text,
clock, gauge Description
automatically generated



A matrisinin determinantını Laplace açılımıyla hesaplayalım:

1. satıra göre Laplace açılımı yapalım:



olacaktır. O halde, ilk olarak, formüldeki A_{1j} kofaktörlerini hesaplayalım:



Bu kofaktörleri, determinant formülünde yerine koyalım:



bulunur.

11.7. Bir Matrisin Klasik Eşleniği

Bir -kare matrisinin klasik eşleniği ile gösterilir ve nın tüm girdilerinin kofaktörlerinin oluşturduğu matrisin transpozesidir, yani



dir.



Örnek: matrisinin klasik eşleniğini bulunuz.

İlk olarak her bir girdinin kofaktörünü bulalım:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$



Bulunur. Dolayısıyla



bulunur.

Özellik: bir -kare matris olmak üzere



dir. Burada birim matristir. Ayrıca eğer $|A| \neq 0$ ise A^{-1} 'nin tersi



şeklindedir.



Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi terslenebilir midir? Terslenebilir ise tersini bulunuz.

Bir matrisin determinanı sıfırdan farklı ise o matrisin terslenebilir olduğunu biliyoruz.



olduğundan A^{-1} matrisi terslenebilirdir. A^{-1} 'nin tersi ise



bulunur.

11.8. Lineer Denklem Sistemlerine Uygulamalar, Cramer Kuralı

n denklemlilik, n bilinmeyenli $Ax = b$ lineer denklem sistemini düşünelim. Bölüm 10 dan hatırlayınız ki A katsayılar matrisi (kare matris), b de sabit terimlerin sütun vektörüdür. $|A| \neq 0$ ise katsayılar matrisinde i sütununu b sütun vektörü ile değiştirilmesinden elde edilen matris olsun.

Determinant ile A_i lineer denklem sisteminin çözümü arasında Cramer kuralı olarak bilinen bir ilişki vardır:

A_i lineer denklem sisteminin çözümünün olması için ancak ve ancak $|A| \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda, denklemin çözümü



şeklindedir.

Bir lineer denklem sisteminin çözümü için Gauss Eliminasyon yönteminden farklı bir farklı bir yöntem sunan Cramer Kuralının sadece bilinmeyen sayısı ile denklem sayısının eşit olduğu sistemler için kullanılabileceğini unutmayalım.

Örnek:



$$2x + y - z = 3$$

lineer denklem sisteminin çözümünü araştıralım:

İlk olarak katsayılar matrisinin determinantına bakalım:



olduğundan verilen denklem sisteminin tek bir çözümü vardır. Cramer kuralından bu çözümü bulalım:



olduğundan denklem sisteminin çözümü  tür.

Bölüm Özeti

Bu bölümde determinant kavramı ele alınmıştır. İlk önce 2×2 ve 3×3 matrislerin determinantları hesaplanmış ve bu matrislerin hesabından yola çıkılarak daha büyük dereceli kare matrislerin determinantların hesabı için tanım verilmiştir. Determinantın, matrisin derecesi büyüdükçe tanımı yoluyla hesabının gittikçe zorlaştığı görülmüştür. Bu sebeple, determinant hesabı için Laplace açılımı olarak bildiğimiz bir yöntem verilmiştir. Bu yöntem, matrislerin minör ve kofaktörleri aracılığıyla matrisin determinantının daha düşük dereceli matrislere indirgenerek hesaplanmasına dayanmaktadır. Laplace yöntemi yardımıyla, ünitenin başında verdiğimiz 2×2 ve 3×3 matrislerin determinantları yeniden elde edilmiş ve sonra 4×4 bir matrisin determinantı bu yöntem yardımıyla elde edilmiştir.

Daha sonra determinantın bir uygulaması olarak, bir matrisin terslenebilir olup olmadığı ve terslenebilir ise tersinin nasıl hesaplanacağı ile ilgili bir yöntem verilmiştir. Böylece bu ders boyunca bir matrisin terslenebilir olup olmadığı ve terslenebilir ise tersinin ne olduğu araştırmalarına tanım yoluyla yada elementer satır işlemleri kullanarak incelemenin yanında üçüncü bir yol olarak da determinant yoluyla incelenmesini öğrenmiş oluyoruz

Determinantın başka bir uygulaması olarak, denklem sayısı ve bilinmeyen sayısı eşit olan lineer denklem sistemlerinin çözümünün olup olmadığı varsa çözümünün nasıl bulunacağına dair Cramer kuralı olarak bilinen bir yöntem de verilmiştir.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007
2. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Linear Algebra, 6th edition, 2018

Ünite Soruları

Soru-1 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - -3

(•) - 3

(•) - 0

(•) - -9

(•) - 9

Cevap-1 :

9

Soru-2 :

$B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 8 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinanı aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 52

(•) - 16

(•) - -5

(•) - 120

(•) - 96

Cevap-2 :

120

Soru-3 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$
 matrisinin a_{23} girdisinin kofaktörü aşağıdakilerden hangisidir?
 (Çoktan Seçmeli)

(•) - 18

(•) - -45

(•) - 61

(•) - 54

(•) - 79

Cevap-3 :

61

Soru-4 :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$
 matrisinin klasik eşleniği aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -5 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

Cevap-4 :

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Soru-5 :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?}$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $\begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(•) - $\begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

Cevap-5 :

$$\begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Soru-6 :

$\sigma = 364152$ permütasyonunun inversiyon sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 9

(•) - 8

(•) - 7

(•) - 6

(•) - Yoktur

Cevap-6 :

9

Soru-7 :

Aşağıdaki kare matrislerle ilgili iddialardan hangileri yanlıştır?

I. $|A| \neq 0$ ise A matrisi terslenebilirdir.

II. terslenebilir bir matris ise $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (adj A)$ dır.

III. $A(adj A) = (adj A)A = I$ eşitliği her zaman doğrudur.

IV. a_{ij} nin kofaktörü $A_{ij} = |M_{ij}|$ şeklinde bulunur.

(Çoktan Seçmeli)

(•) - Hepsi

(•) - Hiçbiri

(•) - I, II

(•) - III, IV

(•) - I, IV

Cevap-7 :

III, IV

Soru-8 :

$\begin{vmatrix} x-4 & 3 \\ 2 & x-9 \end{vmatrix} = 0$ eşitliğini sağlayan x sayıları aşağıdakilerden hangisidir?qq

(Çoktan Seçmeli)

(•) - -3,10

(•) - 3, 10

(•) - 3, -10

(•) - -3,-10

(•) - 0,0

Cevap-8 :

3, 10

Soru-9 :

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = ?$$

(Çoktan Seçmeli)

(•) - -10

(•) - 3

(•) - -16

(•) - 16

(•) - -4

Cevap-9 :

-16

12. OLASILIK

12.1. Örnek Uzay ve Olaylar

Verilen bir deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesi Ω ye örnek uzay denir. ω nin bir elemanına, yani belirli bir sonuca örnek nokta denir.

Bir sonuçlar kümesi Ω ya, yani örnek uzay Ω nin bir alt kümesi olan A ya ise olay denir. Tek bir  örnek noktasından oluşan  kümesine temel olay denir. Ayrıca örnek uzay Ω nin kendisi ve boş küme $\emptyset$ de Ω nin alt kümeleri olduklarından birer olaydırlar. Boş küme $\emptyset$, çoğu zaman imkansız olay olarak adlandırılır.

Örnek: ANKARA kelimesinin harflerini inceleyelim. Örnek uzay Ω ANKARA kelimesindeki tüm mümkün harflerin kümesidir, yani



dir. Bu kelimde A harfinin olma olayı A olsun, o halde



3 elemanlıdır. K harfinin olma olayı K olsun, o halde



1 elemanlıdır, yani Ω temel olaydır.

Eğer gerçekleşen olaylar içinde yer alan sonuçlardan biri meydana geliyorsa, bundan bir olayın meydana geldiği anlaşılır.

Bir olay aslında bir küme olduğundan küme işlemlerini kullanarak yeni olaylar oluşturabiliriz:

A ve B iki olay olmak üzere,

- A nin veya B nin yada her ikisinin meydana gelmesi ancak ve ancak  nin bir olay olmasıdır.
- Hem A nin hem B nin meydana gelmesi ancak ve ancak  nin bir olay olmasıdır.
- A nin tümleyeni  nin bir olay olması ancak ve ancak B nin meydana gelmemesidir.

A ve B olayları ayrık ise yani,  ise bu olaylara ayrık olaylar denir. Başka bir deyişle, A ve B nin ayrık iki olay olması ancak ve ancak aynı anda meydana gelmemeleri ile mümkündür. Eğer üç veya daha fazla olaydan herhangi ikisi ayrık ise bu olaylar da ayrıktır.

Örnek:

- Deney:** Bir bozuk parayı 3 kez atalım ve yazı (Y) ve tura (T) gelmesi sıralarını gözlemleyelim.

Örnek uzay Ω nin 8 elemanı vardır:



olayı arka arkaya iki veya daha fazla yazı görünen sonuçların olayı olsun, yani,



dır ve 3 elemanlıdır. olayı ise tüm atışların aynı olduğu olay olsun, yani



dır ve 2 elemanlıdır.

Dolayısıyla  olduğundan bir temel olaydır.

Arka arkaya beş tane yazı gelmesi olayı ise boş küme dir, yani imkansız olaydır.

b) **Deney:** Bir zar atalım ve üst yüzeye gelen noktaların sayısını gözlemleyelim:

Örnek uzay nin 6 elemanı vardır:



olayı, çift sayıların gelmesi olayı olsun, yani,



dır ve 3 elemanlıdır. olayı, tek sayıların gelmesi olayı olsun, yani,



dır ve 3 elemanlıdır. olayı, asal sayıların gelmesi olayı olsun, yani,



dır ve 3 elemanlıdır.

Dolayısıyla, , zar atıldığında çift sayı yada asal sayı gelme olayıdır, yani



dir. , zar atıldığında tek asal gelen sayıların olayıdır, yani,



dir. , zar atıldığında asal sayı gelmemesi olayıdır, yani,



dir.  olduğundan bu iki olay ayrık olaylardır, diğer bir deyişle, bir zar atıldığında aynı anda hem tek hem çift sayı gelemez.

c) **Deney:** Bir bozuk parayı tura gelene kadar atalım ve tura gelene kadar kaç kez attığımızı sayalım.

Bu deneyin örnek uzayı  dır ve nin eleman sayısı doğal sayılar olduğundan sonsuz elemanlıdır.

Bu örnekte görüldüğü gibi bir örnek uzay sonsuz elemanlı olabilir. Fakat bu derste biz aksini belirtmediğimiz sürece tüm örnek uzaylarını sonlu elemanlı olarak alacağız.

d) **Deney:** Hilesiz iki zarı aynı anda atalım ve üst yüzeylere gelen sayıları gözlemleyelim:

Her bir zarda 6 sayı vardır: 1,2,3,4,5,6. Dolayısıyla iki zar attığımızda örnek uzay , 1 den 6 ya kadar olan sayıların oluşturduğu tüm mümkün ikililerden oluşacaktır ve eleman sayısı $n(S) = 6 \cdot 6 = 36$ olacaktır. Bu elemanlar aşağıda bir tablo halinde gösterilmiştir:

 Diagram Description automatically generated

olayı, iki zar atıldığında gelen sayıların toplamının 6 olması olsun, yani yukarıdaki tablodan bakacak olursak,



dir. olayı, iki zar atıldığında gelen sayılardan en büyüğünün 4 olması olsun, yani



dir.  olayı, toplamı altı olan ve gelen sayılardan en büyüğünün 4 olmasıdır, yani



Tablodaki gölgeli kısımlar ise  olayını göstermektedir.

12.2. Sonlu Olasılık Uzayları

Bir deney sonlu bir örnek uzaya sahip olsun, yani örnek uzayı  olarak düşünelim. Her  noktasının

i. Her sayı negatif olmayan bir reel sayıdır, yani  dır.

ii. Tüm lerin toplamı 1 dir, yani  dir.

koşullarını sağlayan ve elemanlarının olasılıkları olarak adlandırılan reel sayıların atanmasıyla elde edilen kümeye sonlu olasılık uzayı veya olasılık modeli denir.

Bir sonucunun olma olasılığı  olarak gösterilir. Bir olayının olma olasılığı ise  ile gösterilir ve S nin elemanlarının olasılıklarının toplamına eşittir. Eğer  gibi temel olay ise notasyon kolaylığı açısından,  yerine  gösterimi kullanılacaktır.

Örnek: Deney: Üç bozuk para bir kez atılsın ve yazı gelme sayısı gözlemlensin.

Örnek uzay $S = \{0,1,2,3\}$ tür. S nin her bir elemanına karşılık gelen aşağıdaki atamalar bir olasılık uzayı tanımlar:

$$P(0) = \frac{1}{8}, \quad P(1) = \frac{3}{8}, \quad P(2) = \frac{3}{8}, \quad P(3) = \frac{1}{8}$$

Görüldüğü gibi tüm olasılıklar pozitifdir ve toplamaları 1 eşittir.

A olayı, üç bozuk para atıldığında en az birinin yazı gelmesi olsun, yani

$$A = \{1,2,3\}$$

olur. B olayı, üç bozuk para atıldığında ya hepsinin yazı gelmesi yada hepsinin tura gelmesi olsun, yani

$$A = \{0, 3\}$$

olur.

Tanımdan dolayı, A olayının olma olasılığı

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

ve B olayının olma olasılığı

$$P(B) = P(0) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

dir.

12.3. Eş Olasılıklı Uzaylar

Bir örnek uzayın bazı elemanları eşit olasılıklarla meydana gelebilir. Eşit olasılıklara sahip elemanların oluşturduğu sonlu olasılık uzayına eş olasılık uzayı denir. Eğer bir S eş olasılıklı uzayı n elemana sahipse, her bir elemanın gerçekleşme olasılıkları eşit olacağından, her elemanın olasılığı $1/n$ dir. Eğer bir olayı r eleman içeriyorsa A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A) = r \cdot (1/n) = r/n$ dir. Diğer bir deyişle, bir olayının eleman sayısı $n(A)$ ile gösterilmek üzere,

$$P(A) = \frac{A \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dir. Bu formül sadece eş olasılıklı uzaylar durumunda kullanılır, genel durumda kullanılmaz.

Ayrıca, “rastgele” ifadesi de sadece eş olasılıklı uzaylar için kullanılacaktır ve “ S kümesinden rastgele bir eleman seç” ifadesi, S deki her elemanın eşit seçilme olasılığına sahip olduğu anlamına gelecektir.

Örnek: Hilesiz iki zarı aynı anda atalım. örnek uzayının 36 elemanı olacaktır ve her eleman eşit olasılıklıdır ve olasılıkları $1/36$ dır. Dolayısıyla elimizde bir eş olasılık uzayı vardır. olayı, iki zar atıldığında gelen sayıların toplamının 6 olması olsun, yani



dir. olayı, iki zar atıldığında gelen sayılardan en büyüğünün 4 olması olsun, yani



dir. olayı, toplamı altı olan ve gelen sayılardan en büyüğünün 4 olmasıdır, yani



dir. Şimdi olayının olma olasılığını hesaplayalım:

$$P(A) = \frac{A \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

olayının olma olasılığını hesaplayalım:

$$P(B) = \frac{B \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{36}$$

olayının olma olasılığını hesaplayalım:

$$P(A \cap B) = \frac{A \cap B \text{ nın eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

12.4. Sonlu Olasılık Uzayları Üzerine Özellikler

1. Sonlu bir olasılık uzayındaki tüm olayların sınıfı üzerinde tanımlı P olasılık fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

[P1] Her olayı için $0 \leq P(A) \leq 1$

[P2] $P(S) = 1$

[P3] ve ayrık olaylar ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2. herhangi bir olay olmak üzere $P(A^C) = 1 - P(A)$ dir.

Bu özellik, bir E olayının olma olasılığı p ise olmama olasılığının $1 - p$ olduğunu gösterir.

3. Herhangi ve iki olayı ve boş küme için

i. $P(\emptyset) = 0$

ii. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

iii. $A \subseteq B$ ise $P(A) \leq P(B)$

dir.

[P3] özelliği iki ayrık olayın birleşiminin olasılığının nasıl bulunacağına dair bir formül verirken herhangi iki olayın birleşiminin olasılığını nasıl buluruz sorusu doğal olarak akla gelmektedir. Aşağıdaki Toplam Prensibi olarak bilinen özellik bunun cevabını bize verir:

4. (Toplam Prensibi) ve herhangi iki olay olmak üzere

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

dir.

Örnek: Bir yazılım firmasında 30 kişi IT bölümünde, 20 kişi Satış bölümünde, 10 kişi her iki bölümde çalışmak üzere toplam 100 kişi arasından rastgele bir çalışan seçiliyor. Bu çalışanın iki bölümden birinde çalışma olasılığı nedir?

Olasılık uzayı S nin eleman sayısı $n(S) = 100$ dür. olayı IT bölümünde çalışanlar olsun, olayı da Satış bölümünde çalışanlar olsun. Bu durumda $n(A) = 30$ ve $n(B) = 20$ dir. Her iki bölümde de çalışanların olayı  dir ve $n(A \cap B) = 10$ dur.

Bizden rastgele seçilen bir çalışanın iki bölümden birinde çalışma olasılığını bulmamızı istemesi aslında $P(A \cup B)$ yi bulmak demektir.

Toplam Prensibi'nden

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

olduğunu biliyoruz. O halde,

$$P(A) = \frac{A \text{ nin eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{B \text{ nin eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{A \cap B \text{ nin eleman sayısı}}{S \text{ nin eleman sayısı}} = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

olduğundan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

bulunur.

12.5. Şartlı Olasılık

Bir örnek uzayında bir E olayı alalım. E olayı gerçekleşirken bir başka olayının da gerçekleşmesi olasılığına E nin koşullu olasılığı denir, $P(A|E)$ şeklinde gösterilir ve

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

şeklinde hesaplanır.

Eğer eş olasılıklı uzay ise

$$P(A \cap E) = \frac{n(A \cap E)}{n(S)} \quad \text{ve} \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

olacağından

$$P(A|E) = \frac{n(A \cap E)}{n(E)}$$

olur.

Örnek: Bir çift hilesiz zar atılıyor. Örnek uzay S nin, 36 tane ikiliden oluştuğunu ünitenin başında göstermiştik. Dolayısıyla herhangi bir elemanın gelme olasılığı $1/36$ dır. İki zar atıldığında gelen sayıların toplamı 6 ise bu sayılardan birinin 2 olma olasılığı nedir?

$$E = \{\text{Zarların toplamı 6 olması}\} \text{ ve } A = \{\text{En az bir zarın 2 gelmesi}\}$$

olayları olmak üzere soruda bize $P(A|E)$ şartlı olasılığını sormaktadır. Örnek uzayımız eş olasılıklı uzay olduğundan

$$P(A|E) = \frac{n(A \cap E)}{n(E)}$$

dir. Her olayın elemanlarını ayrı ayrı yazarsak,

$$E = \{\text{Zarların toplamı 6 olması}\} = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

olacağından $n(E) = 5$ tir.

$A \cap E$ olayı ise, gelen zarların toplamı 6 iken en birinin 2 gelmesi olduğu için aslında E olayının elemanlarının içinden en az bir girişi 2 olan ikililerin olayı demektir, yani

$$A \cap E = \{(2,4), (4,2)\}$$

olacağından $n(A \cap E) = 2$ dir. Buradan,

$$P(A|E) = \frac{n(A \cap E)}{n(E)} = \frac{2}{5}$$

bulunur.

Şartlı Olasılık için Çarpım Teoremi:

Bir örnek uzayında ve iki olay ve $P(A) > 0$ olsun. Şartlı olasılık tanımından

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

dır. Bu eşitliği şöyle de yazabiliriz:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Bu çarpım formülü, ve olaylarının her ikisi de aynı anda gerçekleşti olayın olasılığını verir. Bu formülü daha fazla $A_1, A_2, \dots, A_m$ olayları için de genişletebiliriz:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_m|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1})$$

olur.

Örnek: Bir kasada 4 ü bozuk olmak üzere toplam 12 ampul bulunmaktadır. Kasadan arka arkaya rastgele çekilen üç ampulün üçünün de bozuk olmama olasılığını bulalım.

12 ampulden 8 i bozuk olmadığından ilk çekilen ampulün bozuk olmama olasılığı 8/12 dir. İkinci ampulü çekmek için artık kutuda 11 ampul kalmış ve bunların 7 si bozuk değildir. Bu yüzden ikinci çekilen ampulün bozuk olmama olasılığı 7/11 dir. Üçüncü ampulü çekmek için artık kutuda 10 ampul kalmış ve 6 sı bozuk değildir. Bu yüzden üçüncü çekilen ampulün bozuk olmama olasılığı 6/10 dur. Çarpım teoreminden, çekilen üç ampulün üçünün de bozuk olmama olasılığı,

$$p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

bulunur.

12.6. Bağımsız Olaylar

Bir olasılık uzayında ve iki olay olmak üzere, bu olaylardan birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesini etkilemiyorsa bu iki olaya bağımsız olaylar denir. Başka bir deyişle, $P(B|A)$ ile $P(B)$ eşit ise, olayı olayından bağımsızdır denir. Dolayısıyla, Çarpım Teoremi $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ dan

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

elde edilir. Bu eşitliği kullanarak, bağımsız olayları şöyle de tanımlarız:

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ise ve olaylarına bağımsız olay, aksi takdirde bağımlı olay denir.

Bağımsızlık aslında bir simetrik bağıntıdır, yani,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ eşitliği } P(A|B) = P(A) \text{ ve } P(B|A) = P(B)$$

dir.

Örnek: Bir bozuk parayı 3 kez atalım. Oluşan eş olasılıklı uzay



dir. Aşağıdaki olayları ele alalım:

$$A = \{\text{İlk atışta yazı gelmesi}\} = \{YYY, YYT, YTY, YTT\}$$

$$B = \{\text{İkinci atışta yazı gelmesi}\} = \{YYY, YYT, TYY, TYT\}$$

$$C = \{\text{Üç atışta arka arkaya tam iki tane yazı gelmesi}\} = \{YYT, TYY\}$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

dür. Bu olayların bağımsız olup olmadıklarını inceleyelim.

$$A \cap B = \{YYY, YYT\} \text{ olduğundan}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

dir, yani A ve B bağımsız olaylardır.

$$A \cap C = \{YYT\} \text{ olduğundan}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{8} = P(A)P(C)$$

dir, yani A ve C bağımsız olaylardır.

$$B \cap C = \{YYT, TYY\} \text{ olduğundan}$$

$$P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(B)P(C)$$

dir, yani B ve C bağımlı olaylardır.

12.7. Rastgele Değişkenler

bir deneyin örnek uzayı olmak üzere, deneyin sonucunun, yani örnek uzayın elemanlarının sayısı olması gerekmez. Şimdiye kadar gördüğümüz örneklerdeki gibi, bir bozuk parayı attığımızda sonuçlar yazı ve tura iken, bir çift zarı attığımızda sonuçlar doğal sayı ikilileridir. Fakat genellikle bir deneyin sonucuna bir sayı atamak isteriz. Örneğin, yazı tura atmada 1 e yazı, 0 a tura atamak uygun olabilir yada bir çift zar atarken, sonuca gelen iki sayının toplamını atamak isteyebiliriz. Böyle bir sayısal değer atamasına rastgele değişken denir. Daha net bir tanımı aşağıdaki gibi verebiliriz:

Bir örnek uzayında her bir sonuca karşılık bir sayısal değer atanması kuralı olan X e rastgele değişken denir. Başka bir deyişle, reel değerli bir X rastgele değişkeni bir deneyin sonuçlarını reel sayılar ile eşleştiren aşağıdaki gibi herhangi bir fonksiyondur:

$$X: S \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \rightarrow X(s)$$

X in değer kümesi, yani X rastgele değişkeni tarafından atanan sayıların kümesine değer uzayı denir ve R_X şeklinde gösterilir.

Sonsuz bir örnek uzayda $\mathbb{R}$ ye giden herhangi bir fonksiyon bir rastgele değişken olarak düşünülemez ama sonlu örnek uzaylarda $\mathbb{R}$ ye giden herhangi bir fonksiyon bir rastgele değişkendir.

Örnek: Bir çift zar atılsın. Biliyoruz ki örnek uzayı, a ve b , 1 den 6 ya kadar olan sayılar olmak üzere 36 tane (a,b) ikilisinden oluşur.

X , zarları attıktan sonra gelen sayıların toplamı olarak atasın. Bu durumda X , değer uzayı

$$R_X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

olan bir rastgele değişkendir.

Y , zarları attıktan sonra gelen sayıların en büyüğü olarak atasın. Bu durumda Y , değer uzayı

$$R_Y = \{1,2,3,4,5,6\}$$

olan bir rastgele değişkendir.

Rastgele Değişkenlerin Toplam ve Çarpımı ve Bir Notasyon

X ve Y , aynı örnek uzayı üzerinde iki rastgele değişken olsun.

İki rastgele değişkenin toplamı,

$$(X + Y)(s) = X(s) + Y(s), \quad s \in S$$

şeklinde,

İki rastgele değişkenin çarpımı,

$$(XY)(s) = X(s)Y(s), \quad s \in S$$

şeklinde ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, rastgele değişken X in k skaleri ile çarpımı

$$(kX)(s) = kX(s), \quad s \in S$$

şeklinde tanımlanır.

Daha genel olarak, herhangi bir polinom yada üstel fonksiyon $h(x,y,...,z)$ için, üzerinde bir fonksiyon olarak $h(X,Y,...,Z)$ yi

$$[h(X,Y,...,Z)](s) = h[X(s), Y(s),..., Z(s)]$$

şeklinde tanımlarız.

Açıktır ki toplam, çarpım, skalerle çarpım ve $h(X,Y,...,Z)$ de birer rastgele değişkendir.

Kısa bir notasyon olarak, bir X rastgele değişkeninin bir “a” elemanına dönüşme olasılığını $P(X = a)$ ile göstereceğiz. Benzer şekilde, bir X rastgele değişkeninin bir “[a,b]” aralığına dönüşme olasılığını $P(a \leq X \leq b)$ şeklinde göstereceğiz, yani $s \in S$ olmak üzere



ve



dir.

Benzer tanımlar, $P(X \leq a)$, $P(X = a, Y = b)$, $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$ gibi notasyonları için de yapılabilir.

12.8. Bir Rastgele Değişkenin Olasılık Dağılımı

X , bir sonlu örnek uzayı üzerinde  değer uzaylı bir rastgele değişken olsun. X , rastgele değişkeni yardımıyla, R_X değer uzayındaki noktalarını olasılıklarına dönüştüren



şeklinde bir fonksiyonu tanımlayabiliriz. Bu fonksiyonu ile oluşan



sıralı ikililerin kümesine X rastgele değişkenin dağılımı denir ve genellikle

x sonuçları 
 $f(x)$ olasılıkları $f(x_1)$ $f(x_2)$... $f(x_t)$

şeklinde bir tablo ile verilir. Dağılım fonksiyonu iki şu iki özelliği sağlar:

i. 

ii. 

Farklı kaynaklarda, X in dağılımı,  notasyonu yerine  notasyonu kullanılır.

Eğer bir eş olasılıklı uzay ve , üzerindeki bir  değer uzaylı X rastgele değişkeninin dağılımı ise



olarak bulunur.

Örnek: Bir çift zar atılsın. Biliyoruz ki örnek uzayı, a ve b , 1 den 6 ya kadar olan sayılar olmak üzere 36 tane (a,b) ikilisinden oluşur, yani  dır.

X rastgele değişkeni, zarları attıktan sonra gelen (a,b) ikilisini sayıların toplamına, yani  ye götürsün. Bu durumda değer uzayı

$$R_X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

dir. Şimdi X in dağılımını bulalım: eş olasılıklı uzay olduğundan R_X değer uzayındaki her noktası için



şeklinde olacağını belirtmiştik. O halde

 için



dir. Çünkü n nin görüntüsü 2 olan sadece bir elemanı vardır: (1,1).

 için



dir. Çünkü n nin görüntüsü 3 olan iki elemanı vardır: (1,2) ve (2,1).

 için



dir. Çünkü n nin görüntüsü 4 olan iki elemanı vardır: (1,3), (2,2) ve (3,1).

Bu şekilde devam edersek,



bulunur ve böylece X rastgele değişkeninin dağılımı



şeklindedir.

12.9. Bir Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri

X bir  olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir rastgele değişken olsun. X rastgele değişkenin beklenen değeri $E(X)$ yada  ile gösterilir ve



şeklinde tanımlanır.

Öte yandan,  değer uzaylı bir X rastgele değişkeninin dağılımı P_X ise, X in beklenen değeri



dir. X in dağılımı,  notasyonu yerine  notasyonu kullanırsa,



dir.

Örnek: Bir bozuk para 6 kez atılıyor. Açık ki örnek uzayı eş olasılıklı uzaydır ve eleman sayısı  tür.

X rastgele değişkeni, 6 kez atılan bozuk paranın yazı gelme sayısı olsun. Bu durumda değer uzayı



olur. X rastgele değişkeninin dağılımı hesaplandığında aşağıdaki tablo elde edilir:

0	1	2	3	4	5	6
1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

Örneğin,

 için



tür. Çünkü nin görüntüsü 1 olan 6 elemanı vardır: YTTTTT, TYTTTT, TTYTTT, TTTYTT, TTTYTT, TTTTYY

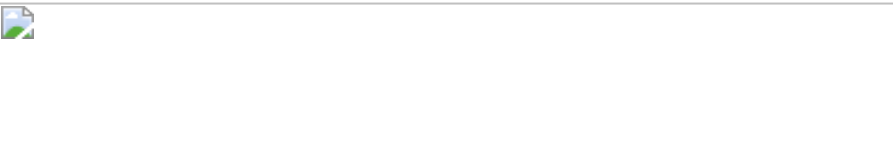
Şimdi X rastgele değişkeninin beklenen değeri



bulunur.

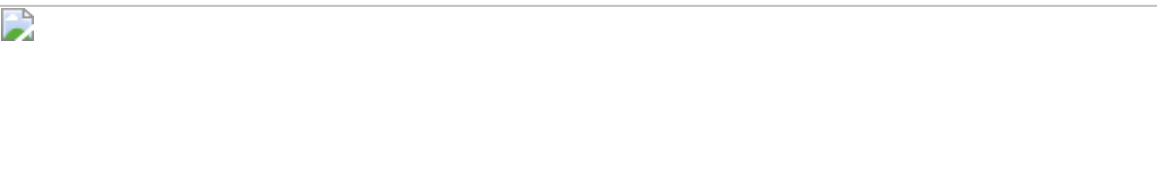
12.10. Bir Rastgele Değişkenin Varyansı ve Standart Sapması

 değer uzaylı bir X rastgele değişkeninin dağılımı , beklenen değeri ise X in varyansı  ile gösterilir ve



şeklinde tanımlanır.

dir. X in dağılımı,  notasyonu yerine  notasyonu kullanırsa,



dir.

X in standart sapması ise  veya daha basit olarak ile gösterilir ve varyansının kareköküdür, yani



şeklinde tanımlanır. Buradan, varyansın



olduğu da elde edilir.

Aşağıdaki formül varyansı hesaplamak için varyansın yukarıdaki tanımından daha kullanışlıdır:



yada



Örnek: Önceki örnekten bir bozuk parayı 6 kez attığımızda, 6 kez atılan bozuk paranın yazı gelme sayısı olan X rastgele değişkeninin değer uzayının



dağılımının

0	1	2	3	4	5	6
1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

ve beklenen değerinin olduğunu biliyoruz. Şimdi X in varyansını standart sapmasını bulalım:



bulunur. Diğer formülle de hesaplayalım:



bulunur. Standart sapma ise



bulunur.

Chebyshev Eşitsizliği: X , beklenen değere ve standart sapmaya sahip bir rastgele değişken olsun.

Herhangi bir k doğal sayısı için, X in aralığında olan bir değerinin olasılığı en az dir, yani



dir.

Örnek: X ,  beklenen değere ve  standart sapmaya sahip bir rastgele değişken olsun.  için Chebyshev Eşitsizliğini gerçekleyin ve yorumlayın.



ve



olduğundan, X in 65 ile 85 arasında olan değerinin olasılığı en az  tür, yani



tür.

Bölüm Özeti

Bu bölümde olasılık konusunun temelleri ele alındı. İlk önce örnek uzay ve olay kavramları verildi. Herhangi iki olayın birleşim, kesişim işlemlerinin de bir olay olduğu gösterildi. Çok sayıda deney örneğinde de bu kavramlar işlendi. Daha sonra sonlu olasılık uzayları üzerinde bir deney sonucunun gerçekleşme olasılığı kavramı verildi. Sonlu olasılık uzayı eş olasılıklı olduğunda olasılıkların nasıl hesaplanacağı görüldü. Ayrıca, olasılıkları bilinen olayların birleşim ve kesişim olaylarının olasılıklarının nasıl hesaplanacağı, bir olayın gerçekleşmeme olasılığının nasıl hesaplanacağı, iki olay birbirinden bağımsız ise olayların kesişimlerinin olasılıklarının nasıl değişeceğine dair de formüller verildi. Bir olayın gerçekleşmesi başka bir olayın gerçekleşmesine bağlı olduğunda olasılık kavramının şartlı olarak gerçekleşeceğine ve bu şartlı olasılık hesabının nasıl yapılacağı da gösterildi.

Bu bölümde son olarak, sonlu örnek uzaylar üzerinde rastgele değişken, rastgele değişkenlerin dağılımları, beklenen değer, varyans ve standart sapma gibi kavramlar verilmiş ve örneklerle pekiştirilmiştir.

Kaynakça

1. S. Lipschutz, M. Lipson, Schaum's Outline of Discrete Mathematics, 3rd edition, 2007

Ünite Soruları

Soru-1 :

X , $\mu = 75$ beklenen değere ve $\sigma = 5$ sapmaya sahip bir rastgele değişken olsun. X 'in 60 ile 90 arasında olan bir değerinin olasılığı en az kaçtır? (Chebyshev Eşitsizliğini kullanın.)

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 3/4

(•) - 2/3

(•) - 8/9

(•) - 4/7

(•) - 1/2

Cevap-1 :

8/9

Soru-2 :

Hilesiz bir zar bir kez atıldığında üste gelen noktaların sayısının beklenen değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 1/2

(•) - 3/4

(•) - 8/3

(•) - 7/2

(•) - 1/9

Cevap-2 :

7/2

Soru-3 :

Düzgün bir madeni para 3 kez atıldığında tura gelme sayısının varyansı aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 3/4

(•) - 1/2

(•) - 7/9

(•) - 8/5

(•) - 17/3

Cevap-3 :

3/4

Soru-4 :

40 kişilik bir sınıfta Matematik dersinden geçenlerin sayısı 21, Fizik dersinden geçenlerin sayısı 12'dir. 8 öğrenci her iki dersten de geçtiğine göre bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin Matematik veya Fizik dersinden geçmiş olma olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 0

(•) - 1

(•) - 1/2

(•) - 4/7

(•) - 5/8

Cevap-4 :

5/8

Soru-5 :

Bir etiket firmasında 8 pembe, 12 mor, 4 sarı etiket basılmıştır. Basılan etiketler arasından arka arkaya iki etiket seçiliyor. İki etiketin de sarı olma olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 1/2

(•) - 1/36

(•) - 1/6

(•) - 0

(•) - 1

Cevap-5 :

1/36

Soru-6 :

A ve B ayırık olmak üzere $P(A) = 0,56$ ve $P(A \cup B) = 0,90$ ise $P(B^c)$ kaçtır?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 0,34

(•) - 0,46

(•) - 0,64

(•) - 0

(•) - 1

Cevap-6 :

0,46

Soru-7 :

Bir madeni para iki kez atılıyor. En az bir kez yazı gelme olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - $1/2$

(•) - 1

(•) - 0

(•) - $3/4$

(•) - $1/4$

Cevap-7 :

$3/4$

Soru-8 :

Düzenli olarak ürün teslimatı yapan bir kuryenin ürünü satıcı firmadan zamanında alma olasılığı 0,88, ürünü müşteriye zamanında teslim etme olasılığı 0,86 olup hem ürünü zamanında satıcıdan alma hem de müşteriye teslim etme olasılığı ise 0,22 tür. Buna göre kuryenin ürünü satıcı firmadan alış saati verildiğine göre zamanında müşteriye teslim edilme olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 0

(•) - 0,86

(•) - 0,25

(•) - 0,84

(•) - 0,22

Cevap-8 :

0,25

Soru-9 :

Ahmet iki bozuk parayı aynı anda atma oyunu oynuyor. Oyunun kurallarına göre, iki yazı gelirse 2 lira, bir yazı gelirse 1 lira kazanıyor, hiç yazı gelmezse 3 lira kaybediyor. Bu oyunun beklenen değeri aşağıdakilerden hangisidir?

(Çoktan Seçmeli)

(•) - 0,25

(•) - 0,50

(•) - 1

(•) - 0

(•) - 0,75

Cevap-9 :

0,25
